

**CONSTANTIN STRÎMBU**

**SEMNALE ȘI CIRCUITE  
ELECTRONICE**

**ANALIZA ȘI PRELUCRAREA  
SEMNALELOR**

Editura Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”  
BRAȘOV

Copyright 2007

***Editura Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”***

Str. Mihai Viteazul nr. 160 BRAȘOV- ROMÂNIA

Tel. +40268423421

e-mail: [secretariat@afahc.ro](mailto:secretariat@afahc.ro)

**Semnale și Circuite Electronice** — Analiza Și Prelucrarea Semnalelor —  
Constantin STRÎMBU

Toate drepturile rezervate

Editurii Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”, Brașov

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| Referent științific:          | Conf. dr. ing. Marian PEARSICĂ |
| Procesare text:               | Autorii                        |
| Multiplicare:                 | Ioan Burian                    |
| Procesare copertă:            | Autorul                        |
| Grafica:                      | Autorul                        |
| Verificare text, martie 2007: | Autorul                        |

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

STRÎMBU, CONSTANTIN

Semnale și Circuite Electronice - Analiza și Prelucrarea Semnalelor/

Constantin STRÎMBU;

Brașov: Academia Forțelor Aeriene “Henri Coandă”, 2007; 120 pagini

Nr. c-dă: 71/16.07.2007

ISBN 978-973-8415-46-1

## **PREFAȚĂ**

Lucrarea de față cuprinde prima parte din materia parcursă de studenții Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”, în cadrul cursului de Semnale și Circuite Electronice.

În lucrare sunt prezentate o parte din problemele fundamentale referitoare la transmiterea și prelucrarea semnalelor în circuitele electronice sau electrice.

Lucrarea a fost elaborată în conformitate cu cerințele planurilor de învățământ și a programelor analitice.

O parte din temele prezentate au fost dezvoltate suplimentar pentru a oferi studenților posibilitatea de a aprofunda înțelegerea fenomenelor fizice ce au loc în cazul analizei semnalelor. S-a căutat ca dezvoltările matematice să fie legate de aspectele fizice ale problemelor discutate și în general acestea să conducă la rezultate utilizabile în practică.

Autorul aduce mulțumiri domnului șef lucrări dr. ing. Cristian-George Constantinescu pentru observațiile valoroase făcute pe parcursul conceperii acestei lucrări.

Autorul

## CUPRINS

|  |            |
|--|------------|
| <b>1. Analiza spectrală a semnalelor</b>   | <b>5</b>   |
| 1.1. Caracteristici generale ale semnalelor  | 5          |
| 1.2. Tipuri de semnale electrice. Parametrii electrice ai semnalelor.  | 9          |
| 1.2.1. Semnale periodice   | 9          |
| 1.2.2. Semnale neperiodice   | 10         |
| 1.3. Reprezentarea semnalelor în domeniul timp și în domeniul frecvență  | 12         |
| 1.3.1. Reprezentarea în domeniul timp și frecvență a unui semnal sinusoidal  | 12         |
| 1.3.2. Reprezentarea în domeniul timp și în frecvență ale unui semnal exprimat printr-o sumă de semnale sinusoidale. | 13         |
| 1.4. Analiza semnalelor. Generalități  | 15         |
| 1.5. Analiza spectrală a semnalelor periodice  | 19         |
| 1.5.1. Tipuri de dezvoltări prin serii Fourier   | 19         |
| 1.5.2. Banda de frecvență ocupată de un semnal periodic  | 23         |
| 1.5.3. Algoritmul utilizat în analiza spectrală a semnalelor periodice   | 23         |
| 1.6. Analiza spectrală a semnalelor neperiodice  | 30         |
| 1.6.1. Noțiuni introductive. Transformata Fourier  | 30         |
| 1.6.2. Analiza spectrală a semnalelor neperiodice. Mod de lucru.   | 35         |
| 1.6.3. Algoritmul utilizat în analiza spectrală a semnalelor neperiodice   | 36         |
| 1.6.4. Exemple de analiză spectrală a impulsurilor   | 38         |
| 1.7. Convoluția semnalelor analogice   | 52         |
| <b>2. Modulația semnalelor utilizate în telecomunicații</b>  | <b>57</b>  |
| 2.1. Necesitatea modulației semnalelor   | 57         |
| 2.2. Modulație cu purtător sinusoidal. Tipuri de modulație.  | 58         |
| 2.2.1. Analiza spectrală a semnalelor modulate în amplitudine (M.A.)   | 58         |
| 2.2.2. Generarea semnalelor modulate în amplitudine (M.A.)   | 68         |
| 2.2.3. Demodularea semnalelor modulate în amplitudine  | 72         |
| 2.2.4. Comparație între sistemele de modulație în amplitudine  | 78         |
| 2.2.5. Analiza spectrală a semnalelor modulate în frecvență (M.F.)   | 79         |
| 2.2.6. Analiza spectrală a semnalelor modulate în fază (M.P. sau M.Φ)  | 89         |
| 2.2.7. Comparatii între modulația în frecvență și modulația în fază  | 90         |
| 2.2.8. Comparatii între MA, MF și MP (MΦ)  | 97         |
| 2.3. Eșantionarea semnalelor   | 99         |
| 2.3.1. Teorema eșantionării  | 99         |
| 2.3.2. Reconstituirea semnalului $x(t)$ din eșantioanele sale  | 105        |
| 2.4. Modulație cu purtător în impulsuri  | 107        |
| 2.4.1. Modulația impulsurilor în amplitudine M.I.A.  | 108        |
| 2.4.2. Modulația impulsurilor în poziție M.I.P.  | 116        |
| 2.4.3. Modulația impulsurilor în durată M.I.D.   | 118        |
| <b>Bibliografie</b>  | <b>119</b> |

# 1. ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR

## 1.1 Caracteristici generale ale semnalelor

În telecomunicații semnalele sunt mărimi fizice cu ajutorul cărora se transmit mesaje. Semnalul este o oscilație electrică, obținută fie de la un generator construit special pentru acest scop, fie într-o secțiune oarecare a unui aparat sau sistem electronic.

Un aparat electronic este constituit dintr-un lanț de subansambluri succesive la care se evidențiază bornele (poarta de intrare, respectiv de ieșire). Schema bloc al unui subansamblu dintr-un aparat este prezentată în figura 1.1.

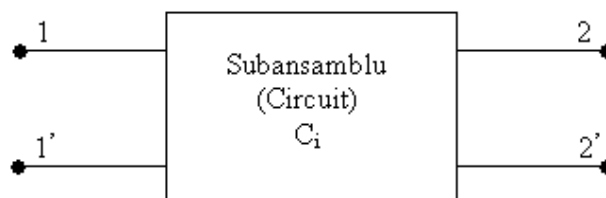


Fig. 1.1. Subansamblul unui sistem, echipament sau aparat electronic

În cele mai multe cazuri circuitele pot fi considerate ca niște cuadripoli (diportii) ce prezintă patru borne de acces specializate: două borne reprezintă poarta de intrare (1, respectiv 1'), iar alte două poarta de ieșire (2, respectiv 2'). Oscilația aplicată la bornele de intrare este de obicei numită semnal iar cea de de la ieșire este răspunsul circuitului  $C_i$  la semnalul aplicat. Evident răspunsul circuitului  $C_i$  poate fi semnal (de intrare) pentru diportul  $C_{i+1}$  situat în aval de  $C_i$ ; în mod asemănător semnalul de intrare al circuitului  $C_i$  poate fi răspunsul circuitului  $C_{i-1}$  aflat în amonte de  $C_i$ .

În sistemele de comunicații semnalul electric (inițial) ce trebuie prelucrat provine de obicei de la un traductor, de exemplu de la un microfon, care transformă o mărime neelectrică în una electrică. Cursul de față nu face obiectul studiului traductoarelor, de aceea se va considera că la intrarea circuitelor se aplică un semnal electric.

Deoarece interesează evoluția trecută sau viitoare a unui semnal, trebuie presupus că acestea sunt funcții de timp  $t$ . Din punct de vedere al posibilității de a caracteriza prin funcții de timp evoluția unui semnal, acestea se pot clasifica în două grupe:

➤ Semnale deterministe

Semnalele pot fi exprimate prin funcții analitice de timp  $x(t)$  cu un număr finit de parametri.

➤ Semnale aleatoare

Semnalele nu pot fi exprimate prin funcții analitice de timp cu un număr finit de parametri, ci prin funcții aleatoare. Prin aprecieri probabilistice se poate determina posibilitățile de evoluție ale acestora.

Un semnal aleator nu este previzibil și de aceea conține o anumită cantitate de informație. Intuitiv se poate spune că semnalul conține o cantitate mai mare de informație cu cât evoluția acestuia este mai puțin probabilă.

Caracterul întâmplător al semnalelor este determinat de cel puțin două cauze:

➤ Prima cauză rezidă în însăși natura fenomenului care este reprodus de semnal.

Studiind de exemplu semnalul de la ieșirea unui microfon trebuie evidențiat caracterul întâmplător al semnalului deoarece nu se poate prevedea exact care vor fi cuvintele, silabele sau literele pe care le va pronunța persoana ce vorbește în fața microfonului.

➤ O a doua cauză este conferită de complexitatea deosebită a fenomenelor reproduse de semnal:

1) fenomene în care intervin un număr mare de elemente, fiind dificil de a oferi o caracterizare deterministă tuturor parametrilor acestora;

2) fenomene de mare finețe, greu de abordat cu mijloacele de investigație actuale;

Un exemplu de semnal electric determinist poate fi tensiunea electrică de c.a. monofazat. Se cunoaște sau se poate determina în orice moment totalitatea parametrilor ce caracterizează semnalul (amplitudine, frecvență, fază), datorită faptului că acest semnal poate fi descris printr-o expresie matematică simplă.

Rotația Pământului în jurul Soarelui poate să fie interpretată ca un semnal determinist neelectric, deoarece pentru pământeni nu aduce nicio informație. Datorită calendarelor (care joacă în acest caz rolul funcției analitice) se cunosc momentele în care Soarele răsare sau apune.

Semnalele transmise în sistemele de telecomunicații, în scopul realizării schimbului de mesaje între doi sau mai mulți corespondenți au caracter aleator (întâmplător). Pentru verificarea și reglarea funcționării subansamblurilor constitutive ale sistemelor se transmit semnale deterministe, așa numite semnale test.

Cunoscând parametrii caracteristici ai semnalului test introdus într-un echipament sau sistem electronic, precum și funcțiile subansamblurilor acestuia, se măsoară parametrii oscilațiilor de la ieșire stabilindu-se dacă funcționarea este corectă.

Pentru a apropia testarea de condițiile de lucru reale (în regim de semnale nedeterministe) semnalele test se aleg astfel încât să simuleze cât mai bine semnalul existent în realitate (semnale de aceeași putere, plasate în același domeniu de frecvență...).

În cursul de față se studiază doar semnalele deterministe.

Analiza semnalelor stabilește posibilitățile de a reprezenta semnalele prin sume discrete sau continue de funcții elementare (exponențiale, sinusoidale, treaptă unitate ...).

Această reprezentare matematică este utilă pentru următoarele scopuri practice:

➤ Determinarea intervalului de frecvențe (banda de frecvență) ce trebuie alocat canalului de telecomunicații afectat pentru transmiterea lui;

➤ Determinarea răspunsului circuitelor liniare la un semnal dat. Aceasta se realizează prin determinarea răspunsului circuitului analizat la un semnal elementar și apoi, aplicând principiul superpoziției, se determină răspunsul circuitului la suma semnalelor elementare ce compun semnalul dat.

Analiza semnalelor se simplifică dacă funcțiile de timp ce le caracterizează au următoarele proprietăți:

- periodicitate;
- simetrie;
- continuitate;

#### A. Periodicitatea

Un semnal  $x(t)$  este periodic dacă funcția de timp care îl descrie satisface relația:

$$x(t) = x(t \pm kT) \quad (1.1)$$

unde:

$k \in \mathbb{N}$ ,  $T$  – reprezintă perioada semnalului (intervalul minim de timp după care semnalul  $x(t)$  se repetă identic).

În figura 1.2 sunt reprezentate formele de undă ale unor semnale periodice, respectiv neperiodice.

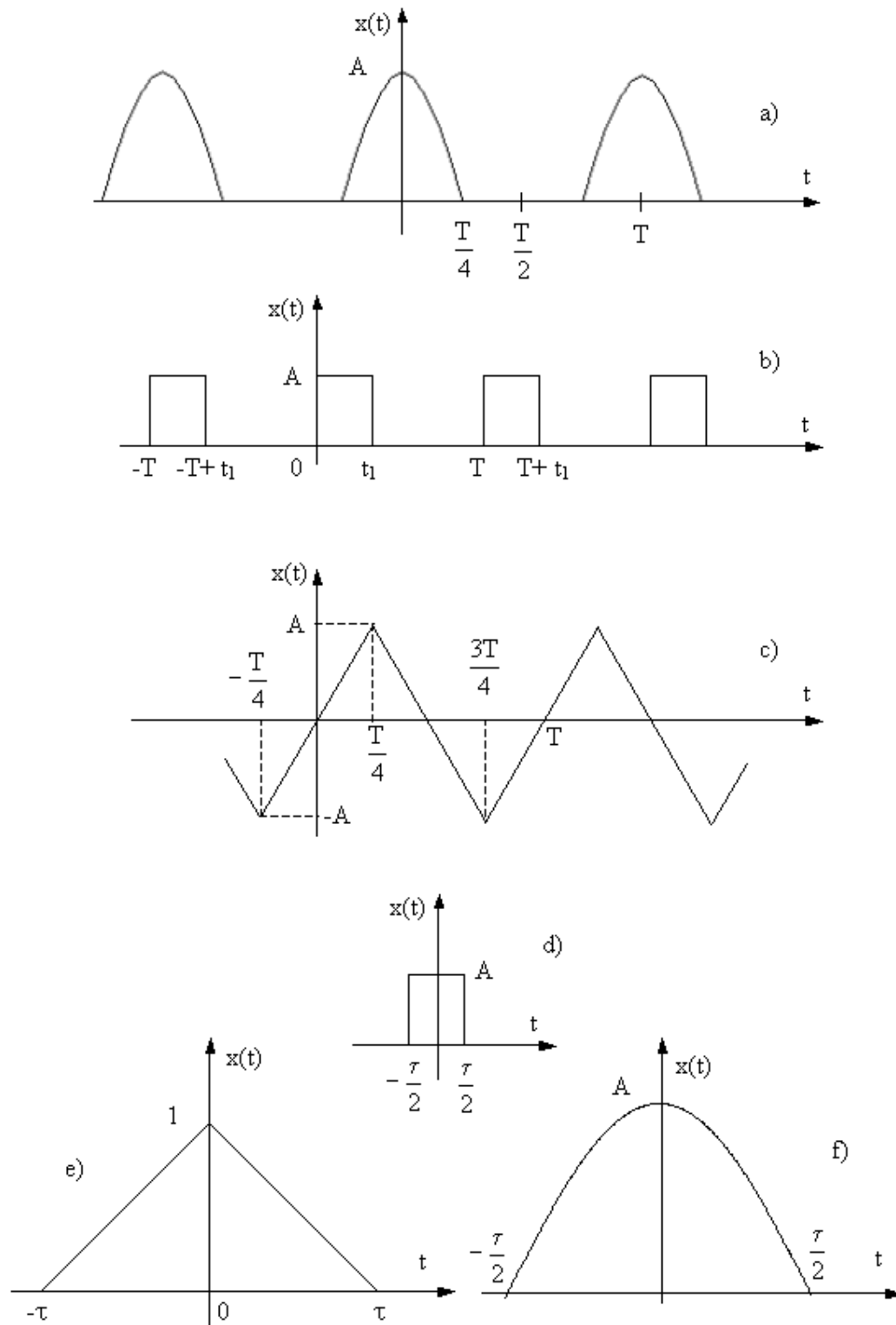


Fig.1.2. Formele de undă ale unor semnale periodice a), b), c) și neperiodice d), e), f).

Observație:

➤ Semnalul neperiodic poate fi considerat un caz limită al unui semnal periodic, la care perioada tinde spre infinit.

➤ Clasificarea semnalelor în semnale periodice și neperiodice este utilă din punct de vedere teoretic, întrucât instrumentul matematic de analiză a semnalelor diferă în funcție de apartenența la una din categoriile menționate mai sus, după cum se va vedea ulterior în cadrul cursului de față. Astfel:

- 1) pentru analiza semnalelor periodice se utilizează seriile Fourier;
- 2) pentru analiza semnalelor neperiodice se utilizează transformata Fourier;

### B. Simetria

Un semnal  $x(t)$  este par dacă funcția de timp care îl descrie satisface relația:

$$x(-t) = x(t) \quad (1.2)$$

Observație:

➤ Semnalul este simetric față de ordonată ( $OY$ ).

➤ Un exemplu de semnal par îl constituie semnalul  $x(t) = A \cos \omega t$ .

Un semnal  $x(t)$  este impar dacă funcția de timp care îl descrie satisface relația:

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.3)$$

Observație:

➤ Semnalul este simetric față de originea axelor.

➤ Un exemplu de semnal par îl constituie semnalul  $x(t) = A \sin \omega t$ .

Analizând semnalele din figura 1.2, se poate observa că:

➤ Semnalele din figura 1.1 a), d), e), f) sunt pare.

➤ Semnalul din figura 1.1 c) este impar.

➤ Semnalul din figura 1.1 d) nu este nici par nici impar.

Se poate demonstra (demonstrația este simplă, putând fi realizată ca exercițiu) că:

➤ în cazul în care semnalul este par

$$\int_{-t_0}^{t_0} x(t) dt = 2 \int_0^{t_0} x(t) dt \quad (1.4)$$

➤ în cazul în care semnalul este impar

$$\int_{-t_0}^{t_0} x(t) dt = 0 \quad (1.5)$$

În analiza spectrală a semnalelor intervine deseori calculul unor integrale de forma (1.4) sau (1.5), de aceea clasificarea semnalelor în pare sau impare (dacă este posibil) aduce o simplificare substanțială a calculelor.

### C. Continuitatea

Un semnal  $x(t)$  este continuu în momentul  $t = t_0$  dacă:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t_0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t_0 + \varepsilon) \quad (1.6)$$

Observație:

➤ Semnalele din figura 1.1 a), c), e), f) sunt continue pe tot domeniul de definiție;

➤ Semnalul din figura 1.1 b) prezintă discontinuități în momentele  $t = \begin{cases} \pm kT \\ t_1 \pm kT \end{cases}$ ;

➤ Semnalul din figura 1.1 e) prezintă discontinuități în momentele  $t = \pm \frac{\tau}{2}$ ;



## 1.2. Tipuri de semnale electrice. Parametrii electrice ai semnalelor.

Din întreaga diversitate de semnale electrice se prezintă doar acelea care vor face obiectul unor analize în cursul de față. Acestea sunt modele ideale de semnale, ce conțin caracteristicile generale și esențiale ale semnalelor reale. Aceste semnale (ideale) elementare, luate separat, nu transmit nicio informație în afară de aceea a existenței lor.

În Cursul de față se studiază numai semnalele electrice. Acestea trebuie să reflecte cât mai fidel anumite mesaje, ca de exemplu: mesaje telegrafice, convorbiri telefonice, muzică, imagini fixe sau mobile, mesaje conținând date numerice, etc.

Mesajele de orice natură ar fi sunt transformate în semnale electrice, curnți sau tensiuni variabile în timp, cu ajutorul traductoarelor. La punctul de recepție, semnalul electric este din nou transformat în mesaj prin intermediul altor traductoare.

Semnalele vor fi prezentate atât sub formă analitică cât și grafică, punând în evidență parametrii electrice ai acestora.

### 1.2.1. Semnale periodice

Spre exemplificare se vor prezenta două tipuri de semnale.

#### A. Semnale sinusoidale (cosinusoidale)

Expresia analitică a semnalului este următoarea:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.7)$$

Considerând că semnalul descris prin (1.7) este un semnal electric, parametrii ce-l definesc sunt următorii:

- A – amplitudinea semnalului [V] sau [A]

Observație:

În practică este des utilizată valoarea efectivă a semnalului, definită astfel:

$$A_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{2} A \approx 0.707 A \quad (1.8)$$

- $\omega_0$  - pulsația [rad /s]

Cum

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.9)$$

se pot pune în evidență alți doi parametrii:

- f - frecvența semnalului [Hz]
- T – perioada semnalului [s]

Relația matematică dintre frecvență și perioadă este următoarea:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.10)$$

Observație:

Conform (1.9) și (1.10) este suficient a se preciza doar unul din cei trei parametrii: pulsație, frecvență respectiv fază.

- $\varphi_0$  - faza inițială [rad]

Utilizând parametrii electrice astfel definiți, expresia analitică (1.7) a semnalului sinusoidal are forma:

$$x(t) = \sqrt{2} A_{ef} \sin(2\pi f t + \varphi_0) = \sqrt{2} A_{ef} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) \quad (1.11)$$

Forma de undă a semnalului este prezentată în figura 1.3.

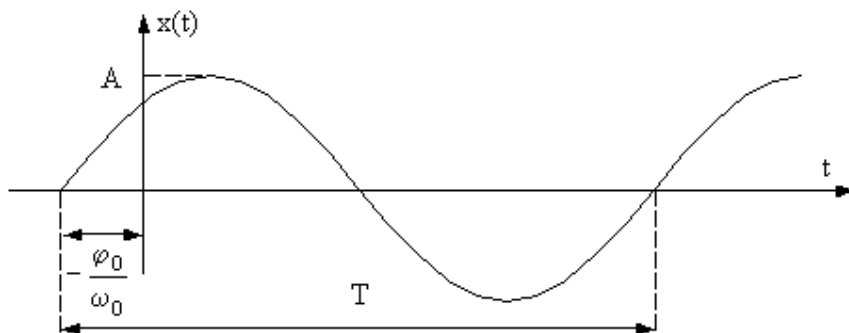


Fig. 1.3. Forma de undă a unui semnal sinusoidal (cosinusoidal)

### B. Semnale dreptunghiulare

Expresia analitică a semnalului este următoarea:

$$x(t) = \begin{cases} A & t_1 < t < t_2 \\ 0 & 0 < t < t_1; t_2 < t < T \end{cases} \quad (1.12)$$

Forma de undă a semnalului este prezentată în figura 1.4.

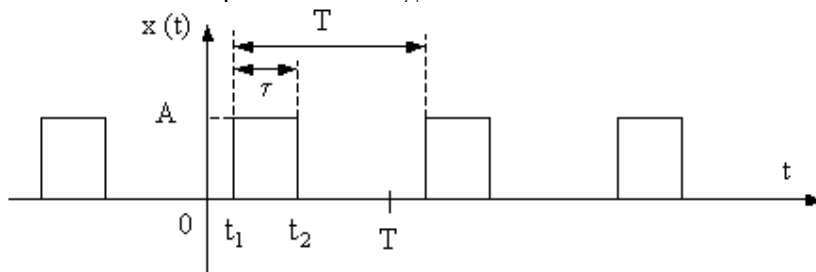


Fig. 1.4 Semnalul periodic dreptunghiular

Parametrii electrici ai semnalului periodic dreptunghiular sunt următorii:

- $A$  – amplitudinea semnalului [V] sau [A]
- $T$  – perioada semnalului [s]
- $\tau = t_2 - t_1$  - durata impulsului [s]

(1.13)

- $q = \frac{\tau}{T}$  - factorul de umplere al semnalului

(1.14)

Observație:

- Factorul de umplere al unui semnal periodic dreptunghiular are o valoare subunitară.  $0 < q < 1$

(1.15)

În cazul unui semnal periodic dreptunghiular se poate pune în evidență componenta continuă a acestuia.

Prin definiție:

$$X_{cc} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} A dt = A \frac{\tau}{T} = q A \quad (1.16)$$

### 1.2.2. Semnale neperiodice

Se prezintă expresiile matematice și formele de undă a două impulsuri des utilizate în telecomunicații.

#### A. Impulsul video

Expresia analitică a semnalului este următoarea:

$$x_v(t) = \begin{cases} A & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t \notin (t_1, t_2) \end{cases} \quad (1.17)$$

Forma de undă a impulsului video este prezentată în figura 1.5.

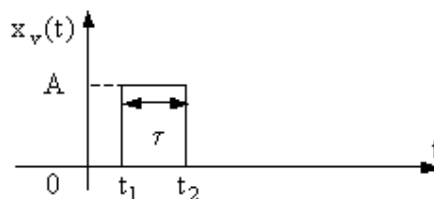


Fig.1.5 Impulsul video

Parametrii electrici ai impulsului video sunt următorii:

- $A$  – amplitudinea semnalului [V] sau [A]
- $\tau = t_2 - t_1$  - durata impulsului [s]

B. Impulsul radio

Expresia analitică a semnalului este următoarea:

$$x_r(t) = \begin{cases} A \cos \Omega_0 t & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t \notin (t_1, t_2) \end{cases} \quad (1.18)$$

Observație:

- Se poate scrie că:

$$x_r(t) = x_v(t) \cos(\Omega_0 t) \quad (1.19)$$

unde  $x_v(t)$  este impulsul video.

Parametrii electrici ai impulsului radio sunt următorii:

- $A$  – amplitudinea semnalului [V] sau [A]
- $\tau = t_2 - t_1$  - durata impulsului [s]
- $\Omega_0$  - pulsația semnalului periodic sinusoidal (cosinusoidal) ce intră în componența impulsului radio.

Observație:

➤ Se poate pune în evidență perioada  $T_0$ , respectiv frecvența  $F_0$  a semnalului periodic sinusoidal (cosinusoidal) ce intră în componența impulsului radio, astfel:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi F_0; T_0 \ll \tau$$

Impulsul radio se obține prin “decuparea” unei durate finite  $\tau$  dintr-un semnal periodic sinusoidal (cosinusoidal).

Forma de undă a impulsului radio este prezentată în figura 1.6.

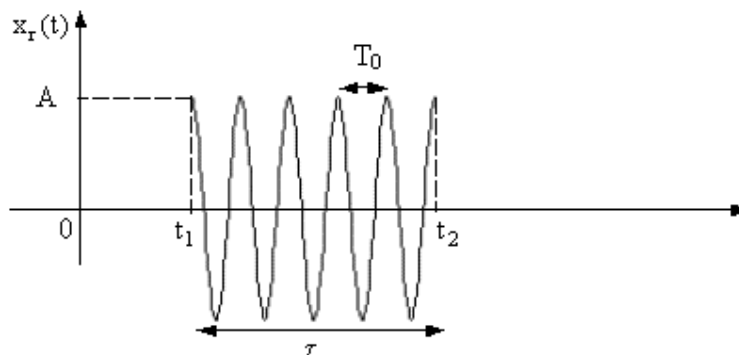


Fig.1.6 Impulsul radio

### 1.3. Reprezentarea semnalelor în domeniul timp și în domeniul frecvență

Orice semnal  $x(t)$  poate fi caracterizat prin două reprezentări:

- reprezentarea în domeniul timp;
- reprezentarea în domeniul frecvență;

Aceste reprezentări mai sunt denumite în mod curent:

- forma de undă a semnalului;
- spectrul de frecvențe al semnalului;

Oricare din aceste două reprezentări caracterizează în mod univoc semnalul, adică unei reprezentări în domeniul timp îi corespunde o singură reprezentare în domeniul frecvență și invers, unei reprezentări în frecvență îi corespunde o singură reprezentare în timp.

Pentru a se realiza trecerea de la reprezentarea în timp la cea în frecvență și invers s-a pus la punct un aparat matematic ce poate fi numit domeniul ”transformatelor”. Pentru a înțelege cât mai bine această reprezentare duală a semnalelor este obligatorie o bună însușire a acestor metode matematice.

Abordarea matematică de trecere din domeniul timp în domeniul frecvență trebuie dublată de o interpretare fizică a fenomenelor, lucru care la început este oarecum dificil. Aceasta dificultate se poate datora faptului că până acum fenomenele fizice au fost studiate ca evoluție a lor în timp, fiind deci reprezentate prin expresii de tipul  $x(t)$ .

De asemenea evoluția unui semnal în timp poate fi mai ușor vizualizată decât evoluția acestuia în frecvență, (care poate fi eventual auzită - dacă frecvențele semnalului se situează în domeniul audio).

O metodă ce poate fi abordată pentru înțelegerea reprezentării în frecvență a semnalelor este aceea de a le auzi, diferențiindu-le după tonalitate (sunete mai joase - vocea de bas, sau mai înalte - vocea de soprană).

Deoarece instalațiile de radiotehnică au o multitudine de destinații, este mai comod ca în unele cazuri să se utilizeze reprezentarea spectrală (în frecvență) iar în altele cea în timp.

De exemplu, rolul unui filtru este de a lăsa să treacă oscilațiile dintr-un interval de frecvențe și de a le opri pe celelalte. Rezultă că de fapt filtrul modifică forma spectrului oscilației aplicate. În acest caz este evident că este mai indicat să se utilizeze reprezentarea spectrală.

În cazul unei scheme de transmitere a impulsurilor interesează în special distorsionarea pe care o suferă forma impulsurilor și deci va fi mai indicată reprezentarea acestora prin expresiile lor în timp.

Observație:

➤ În cazul semnalelor periodice trecerea de la reprezentarea în timp la cea în frecvență se obține cu ajutorul seriilor Fourier.

➤ În cazul semnalelor neperiodice trecerea de la reprezentarea în timp la cea în frecvență se obține cu ajutorul transformatei Fourier sau Laplace.

Pentru a înțelege această reprezentare duală (timp/frecvență) se vor considera cazurile simple a două semnale periodice.

#### 1.3.1. Reprezentarea în domeniul timp și frecvență a unui semnal sinusoidal

Expresia analitică a semnalului este dată de (1.7):

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Reprezentarea în domeniul timp se obține considerând ca variabilă independentă timpul.

Grafic, se obține forma de undă a semnalului prezentată în figura 1.3.

Reprezentarea în domeniul frecvență se obține considerând ca variabilă independentă pulsația -  $\omega_0$  (sau frecvența -  $f_0$ ).

Grafic, se pot obține două reprezentări:

- spectrul de amplitudini al semnalului în care se ilustrează variația amplitudinii semnalului funcție de pulsație (frecvență) -  $A(\omega)$  sau  $A(f)$ - vezi-figura 1.7.a).
- spectrul de faze al semnalului în care se ilustrează variația fazei semnalului funcție de pulsație (frecvență) -  $\varphi(\omega)$  sau  $\varphi(f)$ - vezi- figura 1.7.b).

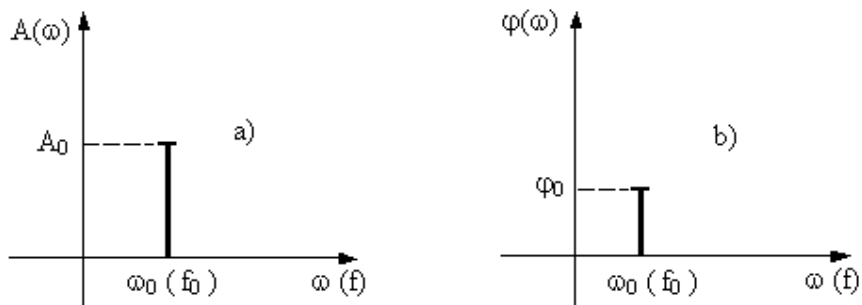


Fig. 1.7. Semnal sinusoidal (cosinusoidal); a) spectrul de amplitudini, b) spectrul de faze

**1.3.2. Reprezentarea în domeniul timp și în frecvență ale unui semnal exprimat printr-o sumă de semnale sinusoidale.**

Expresia analitică a semnalului este:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \tag{1.20}$$

Spectrul de amplitudini al semnalului este prezentat în figura 1.8.a) iar spectrul de faze al semnalului este prezentat în figura 1.8.b).

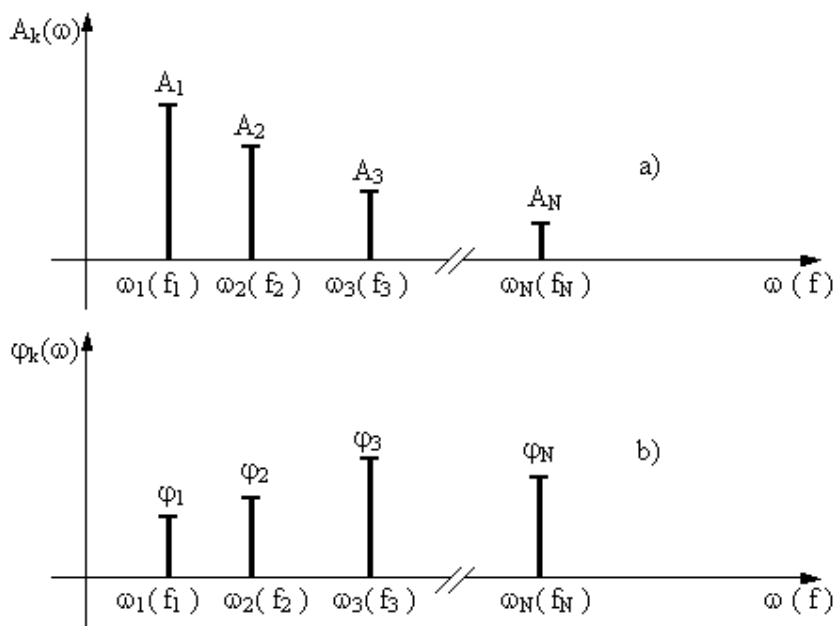


Fig. 1.8. a) Spectrul de amplitudini, b) Spectrul de faze, ale unui semnal exprimat printr-o sumă de semnale sinusoidale

Observație:

➤ Unui semnal sinusoidal îi corespunde o **singură linie spectrală** (fie de amplitudine, fie de fază).

➤ Unei sume de semnale sinusoidale îi va corespunde un **spectru discret** de amplitudini, respectiv faze (fiecărei frecvențe îi va corespunde o singură valoare de amplitudine, respectiv fază)

➤ **Cum metoda de analiză spectrală a unui semnal periodic nesinusoidal este de a-l aproxima printr-o sumă de semnale sinusoidale de frecvențe diferite și cum fiecărei frecvențe îi corespunde o singură amplitudine, respectiv fază, rezultă că acestui semnal îi corespunde un spectru discret de amplitudini (faze).**

➤ Dacă în expresia (1.20)  $N \rightarrow \infty$ , iar  $(\omega_{k+1} - \omega_k) \rightarrow 0$ , în diagramele spectrale de amplitudini și de faze, liniile spectrale devin atât de dese încât nu se poate face nici o distincție între două linii succesive. **În acest caz, spectrele discrete  $A_k(\omega_k)$  și  $\varphi_k(\omega_k)$  se transformă în spectre continue notate  $A(\omega)$  și  $\varphi(\omega)$ .**

O posibilă explicație a semnificației fizice a spectrelor de amplitudine și de fază este următoarea:

Se presupune că se emite un semnal electric a cărui frecvență  $f_0$  este situată în domeniul audio. Pe durata de emisie a acestui semnal nu mai există alt trafic audio. Dacă receptorul este fixat pe orice frecvență  $f \neq f_0$  nu se aude nimic (se subliniază situația ipotetică: nu se mai emite nici un alt semnal). Doar dacă receptorul este fixat pe frecvența emițătorului  $f = f_0$  se va auzi semnalul emis.

Această explicație este conformă cu reprezentarea spectrală din figura 1.7 a) unde funcția  $A(\omega)$  este diferită de zero doar pentru o singură valoare a frecvenței. Cu cât amplitudinea  $A$  a semnalului emis are valoare mai mare cu atât semnalul se va auzi mai tare.

În cazul în care se emite (în întreg spectrul audio) un semnal de tipul (1.20) (sumă finită de semnale sinusoidale) se va putea recepționa (auzi) doar la frecvențele  $f_1, f_2 \dots f_N$ .

Pentru a înțelege semnificația fizică a spectrului de faze se presupune că se emit (concomitent) două semnale sinusoidale ce diferă doar prin faza inițială ( $\varphi_1 < \varphi_2$ ). Acordând receptorul pe frecvența de emisie a semnalelor,  $f_0$ , se va recepționa (auzi) inițial

semnalul caracterizat de  $\varphi_1$ , pentru ca ulterior, după un interval de timp  $\Delta t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{f_0}$  să

poată fi recepționat și semnalul de fază  $\varphi_2$ , cu observația că din acest moment tăria sunetului va fi dată de amplitudinea semnalului rezultat:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = \underbrace{A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{amplitudine}} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

## 1.4. Analiza semnalelor. Generalități

Conform definiției anterioare, analiza semnalului  $x(t)$  constă în echivalarea sa printr-o sumă de semnale elementare:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N a_n f_n(t) \quad (1.21)$$

unde:

- $a_n$  sunt coeficienți;
- $f_n(t)$  sunt expresiile analitice ale semnalelor elementare;

Observație:

- Este indicat ca funcțiile  $f_n(t)$  să aibă o reprezentare analitică simplă;
- Relația (1.21) este deosebit de importantă în cazul circuitelor liniare la care se poate aplica teorema superpoziției; dacă  $y(t)$ ,  $\varphi_n(t)$  sunt răspunsurile circuitului liniar la semnalele  $x(t)$ ,  $f_n(t)$  se poate scrie că:

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) \quad (1.22)$$

În acest caz răspunsul la semnalul  $x(t)$  se deduce prin însumarea răspunsurilor parțiale, obținute pentru semnalele elementare  $f_n(t)$ ;

- $N$  poate fi finit sau infinit.

Calculul este mai comod atunci când  $N$  este finit și de o valoare mică; în acest caz atât semnalul cât și răspunsul se exprimă printr-un număr redus de termeni.

Când  $N$  este teoretic infinit, se contată că valorile coeficienților  $a_n$  scad începând de la o valoare  $n_{\max}$  a rangului  $n$ ; prin aceasta se pot neglija termeni cu rangul  $n > n_{\max}$  și se obține o exprimare aproximativă a semnalului  $x(t)$ .

➤ **Analiza semnalului constă în determinarea coeficienților  $a_n$  atunci când este dat semnalul  $x(t)$  și când este precizat setul de funcții  $f_n(t)$ .**

➤ **Sinteza este operația opusă analizei ; se presupun cunoscuți coeficienții  $a_n$  și setul de funcții  $f_n(t)$  și se cere determinarea expresiei restrânse a semnalului  $x(t)$ .**

Se observă că pentru realizarea analizei unui semnal  $x(t)$  este necesar a se preciza funcțiile  $f_n(t)$ .

Pentru a realiza analiza semnalelor utilizând seriile Fourier (mod de lucru ce face obiectul cursului de față) setul de funcții  $f_n(t)$  utilizat este următorul:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right), \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (1.22)$$

Analiza Fourier se bazează pe funcții trigonometrice, ceea ce semnifică faptul că un semnal oarecare  $x(t)$  este aproximat printr-o sumă infinită de semnale sinusoidale de amplitudini, frecvențe și faze inițiale diferite.

Cunoscând expresia semnalului  $x(t)$  și setul de funcții  $f_n(t)$ , trebuie determinați coeficienții  $a_n$ , adică amplitudinile corespunzătoare.

Pentru ca relațiile de calcul pentru coeficienții  $a_n$  să fie cât mai simple setul de funcții  $f_n(t)$  trebuie să se bucure de proprietatea de ortogonalitate, adică:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f_m(t) f_n(t) dt = \begin{cases} C^2, & \text{pt. } m=n \\ 0, & \text{pt. } m \neq n \end{cases} \quad (1.23)$$

unde:

- $t_0$  - este un moment oarecare;
- $T$  - este domeniul de ortogonalitate;
- $C$  - reprezintă norma funcțiilor;

În cazul în care  $C=1$ , setul de funcții este ortonormat.

În cazul în care una din funcțiile  $f_n(t)$  este o constantă  $A$ , atunci din condiția de ortogonalitate  $\int_{t_0}^{t_0+T} A A dt = C^2$  se obține valoarea constantei:

$$A = \frac{C}{\sqrt{T}} \quad (1.24)$$

Determinarea coeficienților  $a_n$  (adică de fapt calculele matematice ce constituie analiza semnalului) se realizează înmulțind ambii membri ai egalității (1.23) cu funcția  $f_m(t)$  și apoi integrând pe intervalul de ortogonalitate, astfel:

$$\begin{aligned} \int_T x(t) f_m(t) dt &= \int_T \left( \sum_{n=0}^N a_n f_n(t) \right) f_m(t) dt = \sum_{n=0}^N a_n \left( \int_T f_n(t) f_m(t) dt \right) \stackrel{(1.23)}{=} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n C^2 = \sum_{n=0}^N a_m C^2 = a_m C^2 & \text{pt. } m = n \\ 0 & \text{pt. } m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

de unde se obține formula:

$$a_m = \frac{1}{C^2} \int_T x(t) f_m(t) dt \quad (1.25)$$

Pentru a demonstra exactitatea dezvoltării semnalului  $x(t)$  după expresia (1.21), în care coeficienții  $a_n$  se calculează conform (1.25), se presupune că se poate scrie:

$x(t) = \sum_{n=0}^N b_n f_n(t)$ , adică ar mai exista o dezvoltare a aceluiași semnal, constituită cu alți coeficienți  $b_n$ , dar cu același set de funcții  $f_n(t)$ .

Eroarea medie pătratică (mărimă pozitivă sau cel mult nulă) are expresia:

$$D = \int_T \left[ x(t) - \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) \right]^2 dt \geq 0$$

În urma unor calcule simple, în care se ține cont de expresia (1.21) a semnalului  $x(t)$ , se obține:

$$\begin{aligned} D &= \int_T \left[ x(t) - \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) \right]^2 dt = \int_T \left[ x^2(t) - 2x(t) \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) + \left( \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) \right)^2 \right] dt = \\ &= \int_T x^2(t) dt - \int_T 2x(t) \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) dt + \int_T \left( \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) \right)^2 dt = \int_T x^2(t) dt - \\ &- 2 \int_T \left( \sum_{n=0}^N a_n f_n(t) \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) \right) dt + \int_T \left[ \left( \sum_{n=0}^N (b_n f_n(t))^2 \right) + 2 \left( \sum_{i \neq j} b_i f_i(t) b_j f_j(t) \right) \right] dt \end{aligned}$$

Conform proprietății de ortogonalitate (1.23), a setului de funcții  $f_n(t)$ , termenii expresiei anterioare devin:



$$\begin{aligned} \int_T \left( \sum_{n=0}^N a_n f_n(t) \right) \left( \sum_{n=0}^N b_n f_n(t) \right) dt &= \int_T \left[ \left( \sum_{n=0}^N a_n b_n (f_n(t))^2 \right) + 2 \left( \sum_{i \neq j} a_i b_j f_i(t) f_j(t) \right) \right] dt = \\ &= \sum_{n=0}^N \left[ a_n b_n \underbrace{\left( \int_T (f_n(t))^2 dt \right)}_{C^2} \right] + 2 \sum_{i \neq j} \left[ a_i b_j \underbrace{\left( \int_T f_i(t) f_j(t) dt \right)}_0 \right] \stackrel{(1.23)}{=} C^2 \sum_{n=0}^N a_n b_n \\ \int_T \left[ \left( \sum_{n=0}^N (b_n f_n(t))^2 \right) + 2 \left( \sum_{i \neq j} b_i f_i(t) b_j f_j(t) \right) \right] dt &= \sum_{n=0}^N \left[ b_n^2 \underbrace{\left( \int_T (f_n(t))^2 dt \right)}_{C^2} \right] + \\ + 2 \sum_{i \neq j} \left[ b_i b_j \underbrace{\left( \int_T f_i(t) f_j(t) dt \right)}_0 \right] &\stackrel{(1.23)}{=} \sum_{n=0}^N C^2 b_n^2 = C^2 \sum_{n=0}^N b_n^2 \end{aligned}$$

În consecință:

$$D = \int_T x^2(t) dt - C^2 \sum_{n=0}^N a_n b_n + C^2 \sum_{n=0}^N b_n^2 = \int_T x^2(t) dt + C^2 \sum_{n=0}^N (b_n - a_n)^2 - C^2 \sum_{n=0}^N a_n^2$$

Se observă că eroarea medie pătratică,  $D$ , este minimă în raport cu alegerea coeficienților  $b_n$  atunci când  $b_n = a_n$ , adică atunci când coeficienții dezvoltării semnalului  $x(t)$  sunt calculați conform (1.21).

Cum  $D \geq 0$  se obține inegalitatea lui Bessel:

$$\int_T x^2(t) dt \geq C^2 \sum_{n=0}^N a_n^2 \tag{1.26}$$

Sistemul de semnale elementare  $f_n(t)$  este complet în condiția în care  $D \rightarrow 0$  atunci când  $N \rightarrow \infty$ , în acest caz expresia (1.26) conducând la o egalitate ce poartă numele de teorema Parseval.

$$\int_T x^2(t) dt = C^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \tag{1.27}$$

Acestor rezultate matematice li se pot atribui următoarele semnificații fizice:

➤ Totalitatea coeficienților  $a_n$  constituie spectrul semnalului, iar coeficienții înșiși sunt amplitudinile componentelor spectrale.

În figura 1.9 este reprezentat spectrul unui semnal oarecare  $x(t)$ .

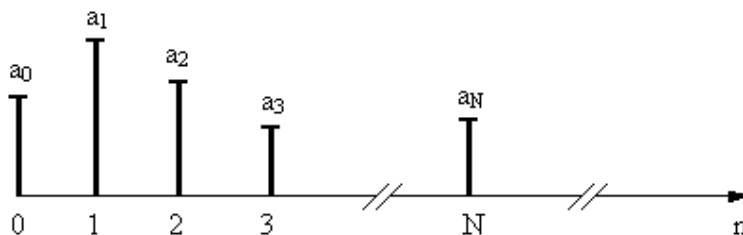


Fig. 1.9. Spectrul de amplitudini al semnalului  $x(t)$

➤ Conform teoremei lui Parseval se poate da o interpretare energiei semnalului.

Considerând că  $x(t)$  este un curent sau o tensiune aplicată pe un rezistor  $R=1\Omega$ , se recunoaște că expresia  $\int_T x^2(t)dt$  exprimă energia semnalului, conținută în intervalul  $T$ .

Rezultă că energia semnalului este calculabilă printr-o însumare spectrală: fiecare componentă dă o contribuție energetică proporțională cu pătratul amplitudinii sale.

➤ Puterea semnalului, mediată pe intervalul unei perioade are următoarea expresie:

$$P_T = C^2 \sum_{n=0}^N a_n^2 = \int_T x^2(t)dt \quad (1.28)$$

Setul de funcții alese pentru a realiza analiza Fourier a semnalelor sunt:

$$\cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right), \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (1.29)$$

Aceste funcții sunt ortogonale, având norma:

$$C = \sqrt{\frac{T}{2}} \quad (1.30)$$

Notând  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  se verifică faptul că funcțiile (1.28) sunt ortogonale, deoarece:

$$\int_T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{daca } m=n \\ 0, & \text{daca } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_T \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{daca } m=n \\ 0, & \text{daca } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_T \cos(m\omega t)\sin(n\omega t)dt = 0, \text{ pentru orice } m, n$$

Pentru a putea analiza și semnale care conțin termeni constanți se va lucra cu următorul set de funcții ortogonale:

$$A, \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right), \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (1.30)$$

Din condiția (1.24), rezultă că:

$$A = \frac{C}{\sqrt{T}} = \frac{\sqrt{\frac{T}{2}}}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.31)$$

Concluzie:

**Pentru a realiza analiza Fourier, se recurge la setul de funcții trigonometrice precizat de (1.22).**

Funcțiile trigonometrice nu sunt singurele utilizate la analiza semnalelor, în consecință analiza Fourier nu este unica metodă de lucru. Dacă în locul funcțiilor trigonometrice se utilizează în dezvoltarea (1.21) funcțiile Legendre, Laguerre, Cebîșev, Hermite etc. se dezvoltă semnalul în serie Fourier-Legendre, Fourier-Laguerre etc., prin aceasta efectuându-se analiza Fourier-Legendre, Fourier-Laguerre.

## 1.5. Analiza spectrală a semnalelor periodice

Analiza spectrală a semnalelor periodice constă în descompunerea acestora în funcții elementare (semnale sinusoidale de amplitudini, frecvențe și faze inițiale diferite).

Un semnal periodic  $x(t)$  de perioadă  $T$  poate fi dezvoltat în serie Fourier dacă satisface condițiile Dirichlet, și anume:

- să fie o funcție de modul integrabil pe intervalul  $T$ , adică,  $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$  să fie finită;
- să aibă un număr de discontinuități finite în intervalul unei perioade;
- să aibă un număr finit de maxime și minime în interiorul unei perioade;

Dezvoltarea unui semnal periodic  $x(t)$  în serii Fourier poate să ia aibă următoarele forme:

- forma trigonometrică (S.F.T.);
- forma armonică (S.F.A.);
- forma exponențială (S.F.E.);

### 1.5.1. Tipuri de dezvoltări prin serii Fourier

Toate cele trei tipuri de dezvoltări în serie Fourier a unui semnal  $x(t)$  sunt echivalente între ele din punct de vedere matematic. Fiecare dintre ele oferă facilități specifice ce ajută la interpretarea fizică a fenomenelor.

#### A. Forma trigonometrică a dezvoltării Fourier (S.F.T.)

Expresia matematică a dezvoltării semnalului  $x(t)$  în serie Fourier trigonometrică este următoarea:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n \omega_0 t) \quad (1.32)$$

unde  $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$  reprezintă frecvența de repetiție a semnalului, ce poartă numele de frecvența fundamentală.

Coefficienții  $C_0$ ,  $C_n$ ,  $S_n$  se calculează conform (1.25), utilizând setul de funcții (1.22), obținându-se relațiile:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (1.33)$$

$$C_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(n \omega_0 t) dt \quad (1.34)$$

$$S_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(n \omega_0 t) dt \quad (1.35)$$

**Utilizând scrierea semnalului sub forma S.F.T. se pot calcula direct coeficienții de tipul  $a_n$ .**

#### B. Forma armonică a dezvoltării Fourier (S.F.A.)

Seria trigonometrică poate fi reprezentată într-o formă mai compactă, denumită formă armonică, utilizând numai funcții cosinusoidale.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n \omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_0 t + \varphi_n) \quad (1.36)$$

unde:

$$A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2} \quad (1.37)$$

$$\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{S_n}{C_n} \quad (1.38)$$

$$A_0 = C_0 \quad (1.39)$$

Seria Fourier armonică dă o descompunere a semnalului periodic într-o sumă de semnale cosinusoidale ale căror frecvențe sunt multipli ai frecvenței fundamentale  $f_0$  - a semnalului periodic.

**Utilizând scrierea semnalului sub forma S.F.A. se poate reprezenta spectrul semnalului, deoarece expresia (1.36) precizează valorile amplitudinilor ( $A_n$ ), respectiv fazelor ( $\varphi_n$ ) pentru fiecare armonică.**

Scriind în detaliu expresia (1.36) se pune în evidență componenta continuă și armonicile semnalului.

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(1\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) + \dots$$

- Componenta continuă - (la frecvența  $f = 0$ )

$$A_0 = C_0$$

- Armonica fundamentală (fundamentală) - (la frecvența  $f = f_0 = \frac{1}{T}$ ,  $n = 1$ )

$$A_1 \cos(1\omega_0 t + \varphi_1)$$

- Armonica de ordinul doi - (la frecvența  $f = 2f_0 = \frac{2}{T}$ ,  $n = 2$ )

$$A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$$

- 
- Armonica de ordinul  $k$  - (la frecvența  $f = kf_0 = \frac{k}{T}$ ,  $n = k$ )

$$A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$


---

Observație:

- În cazul în care semnalul  $x(t)$  este un semnal par, dezvoltarea în serie armonică va coincide cu dezvoltarea în serie trigonometrică.

Cum funcția sinus este impară, rezultă că  $x(t)\sin(n\omega_0 t)$  este o funcție impară iar conform (1.5) se obține că  $S_n = 0$ .

Din (1.37) și (1.38) rezultă că  $A_n = C_n$ , respectiv  $\varphi_n = 0$

În concluzie semnalul  $x(t)$  par poate fi scris sub forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t) \quad (1.40)$$

- În cazul în care semnalul  $x(t)$  este un semnal impar, conform (1.34) se obține că  $C_n = 0$  și din (1.37) rezultă că  $A_n = S_n$ .

Demonstrația faptului că  $C_n = 0$  se bazează pe observația că funcția cosinus este pară, că  $x(t)\cos(n\omega_0 t)$  este o funcție impară, pe care se aplică (1.5).

Din (1.33) și (1.38) rezultă că  $C_0 = 0$ , respectiv  $\varphi_n = -\frac{\pi}{2}$ .

În concluzie semnalul poate fi scris ca o sumă de funcții sinusoidale de forma:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega_0 t) \quad (1.41)$$

Componenta continuă a semnalului este nulă,  $A_0 = 0$ .

Observații:

➤ Caracterizarea în domeniul frecvență se realizează prin diagramele spectrale asociate seriei armonice, spectrul de amplitudine  $A_n(n\omega_0)$  sau  $A_n(nf_0)$  și spectrul de fază  $\varphi_n(n\omega_0)$  sau  $\varphi_n(nf_0)$ .

➤ Valoarea coeficienților reprezintă amplitudinile armonicilor de pulsație  $n\omega_0$  (sau frecvență  $nf_0$ ).

➤ Liniile spectrale asociate seriei armonice vor fi localizate la multiplii ai frecvenței fundamentale:  $\omega_0(f_0), 2\omega_0(2f_0), \dots, N\omega_0(Nf_0), \dots$

C. Forma exponențială a dezvoltării Fourier (S.F.E.)

Expresia dezvoltării exponențiale este următoarea:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t} \quad (1.42)$$

Această expresie se obține din S.F.T. prin exprimarea funcțiilor sinus și cosinus sub formă exponențială, utilizând relațiile lui Euler.

Demonstrație:

Relațiile lui Euler sunt următoarele:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

Semnalul scris sub formă de S.F.T. devine:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(C_n - jS_n)}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{(C_n + jS_n)}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (1.43)$$

Expresia (1.42) poate fi scrisă sub forma:

$$x(t) = A_{0c} + \sum_{n=-\infty}^{-1} A_{nc} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t} = A_{0c} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-nc} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t} \quad (1.44)$$

unde s-au folosit notațiile:

$$A_{nc} = A_{nc}(n\omega_0); \quad A_{-nc} = A_{nc}(-n\omega_0)$$

Din identificarea coeficienților din expresiile (1.43) și (1.44) rezultă:

$$A_{0c} = C_0 = A_0$$

$$A_{nc} = \frac{C_n - jS_n}{2} \quad (1.45)$$

$$A_{-nc} = \frac{C_n + jS_n}{2}$$

Relațiile (1.45) pun în evidență legătura dintre coeficienții seriei armonice și celei trigonometrice.

Coficienții S.F.E. se pot obține direct utilizând relația:

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.46)$$

Coficienții  $A_{nc}$  sunt mărimi complexe putând fi reprezentate prin modul și fază

$$A_{nc} = |A_{nc}| e^{j\phi_n} \quad (1.47)$$

și

$$\begin{cases} |A_{nc}| = |A_{-nc}| = \frac{A_n}{2} \\ \phi_n = \varphi_n = -\arctg \frac{S_n}{C_n} \end{cases} \quad (1.48)$$

**Seria exponențială este preferată, în multe cazuri, celei armonice datorită simplității operațiilor (derivare, integrare) cu funcții exponențiale, precum și datorită caracterului mai general al acestei reprezentări.**

Observații:

➤ Caracterizarea în domeniul frecvență se realizează prin diagramele spectrale asociate seriei exponențiale,  $|A_{nc}(n\omega_0)|$  sau  $|A_{nc}(nf_0)|$  și spectrul de faze  $\phi_n(n\omega_0)$  sau  $\phi_n(nf_0)$ .

➤ Liniile spectrale asociate seriei armonice vor fi localizate la frecvențele  $\pm\omega_0(\pm f_0), \pm 2\omega_0(\pm 2f_0), \dots, \pm N\omega_0(\pm Nf_0), \dots$  Se prezintă în paralel diagramele spectrale de amplitudine ale aceluiași semnal  $x(t)$  dezvoltat prin S.F.A. – figura 1.10 a) și prin S.F.E. - figura 1.10 b)

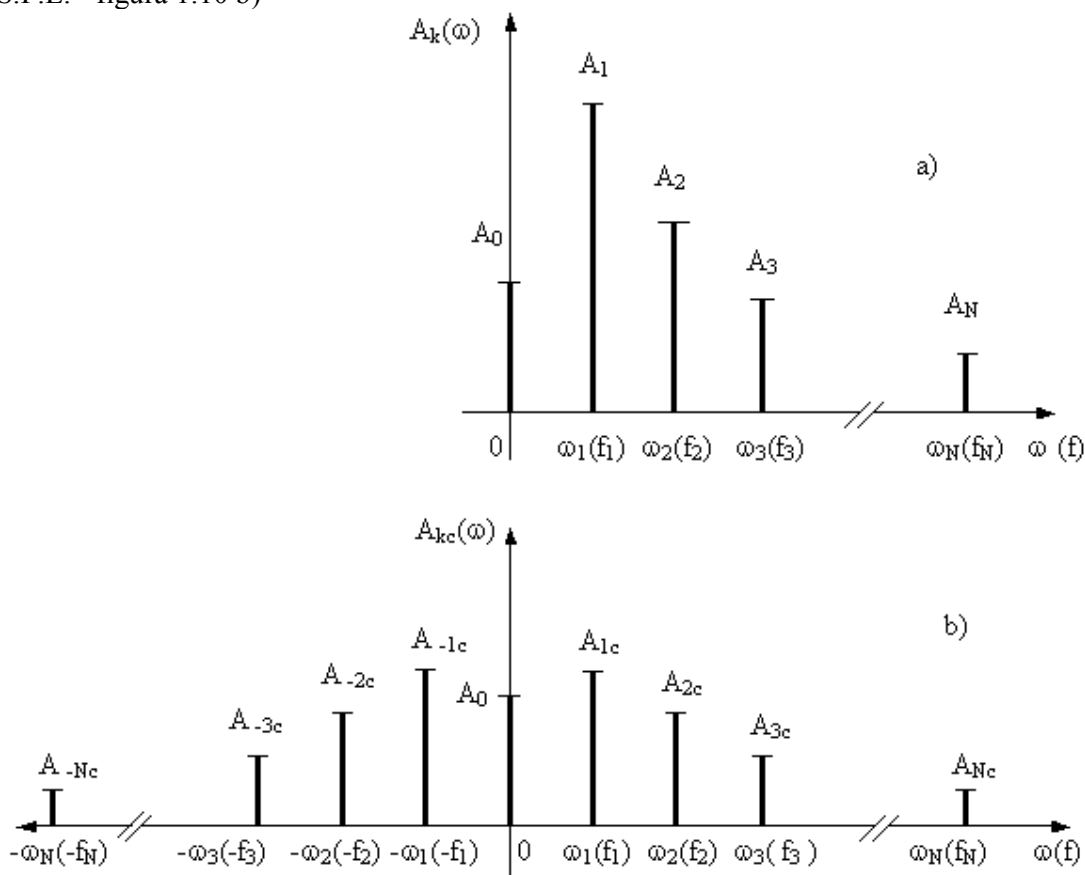


Fig.1.10 Diagramele spectrale de amplitudine ale semnalului  $x(t)$ ;  
a) dezvoltat prin S.F.A. b) prin S.F.E.

➤ Semnificația frecvențelor negative este următoarea: două componente exponențiale localizate simetric față de ordonată se însumează și dau o componentă sinusoidală de frecvență pozitivă. Frecvențele negative sunt introduse de acest instrument matematic de analiză, care este seria Fourier exponențială și care operează cu semnale exponențiale. Acestea nu au semnificație fizică luată individual, ci numai în perchi de componente de frecvențe  $\pm k\omega_0$ . Ca atare, atunci când se analizează spectrul unui semnal periodic utilizând seria exponențială, trebuie să se țină seama că frecvențele componentelor cu existență reală sunt cele pozitive, iar amplitudinile acestor componente sunt la jumătate din valoarea celor obținute prin serie armonică.

### 1.5.2. Banda de frecvență ocupată de un semnal periodic

➤ **Spectrul unui semnal periodic este discret. Există semnal doar la multiplii ai frecvenței fundamentale, care corespunde perioadei semnalului.**

➤ Teoretic, spectrele semnalelor periodice se întind de la  $\omega=0$  la  $\omega=\infty$ . Practic spectrele sunt limitate. **Reprezentarea diagramei spectrale de amplitudini pune în evidență legea de descreștere a amplitudinilor armonicilor, permițând să se limiteze seria la un termen de la care începând, amplitudinea componentelor este neglijabilă.** Trunchierea seriei de la un anumit termen depinde de cerințele impuse tipului de comunicație care utilizează semnalul respectiv. Se pot considera neglijabile componentele ale căror amplitudini sunt mai mici decât o anumită fracțiune din amplitudinea fundamentei.

➤ **Banda de frecvență ocupată de un semnal cuprinde frecvențele armonicilor a căror amplitudini sunt mai mari decât o anumită fracțiune din amplitudinea fundamentei.** În urma realizării analizei spectrale se poate determina lățimea benzii de frecvențe ocupată de acel semnal.

### 1.5.3. Algoritmul utilizat în analiza spectrală a semnalelor periodice

Pentru o cât mai corectă abordare a pașilor matematici ce au ca scop analiza spectrală a unui semnal periodic se propune următorul algoritm:

- 1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;
- 2) Reprezentarea grafică a evoluției în timp a semnalului;
- 3) Analiza simetriei semnalului;
- 4) Dezvoltarea semnalului în S.F.T.;
- 5) Dezvoltarea semnalului în S.F.A.;
- 6) Reprezentarea spectrului de amplitudine și de fază;
- 7) Determinarea lățimea de bandă a semnalului;

**Ca exemplu a fost aleasă analiza spectrală a unui semnal periodic dreptunghiular.**

- 1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t < T \end{cases} \quad q = \frac{t_1}{T} \text{ (factorul de umplere)}$$

- 2) Reprezentarea în timp a semnalului este prezentată în figura 1.11.

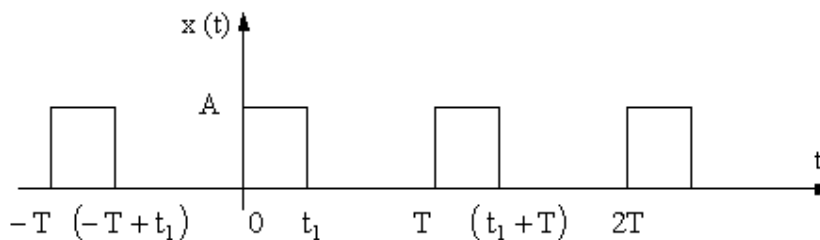


Fig. 1.11 Semnalul periodic dreptunghiular

- 3) Din reprezentarea grafică (precum și din expresia matematică) se observă că  $x(t)$  nu este nici par nici impar.

## 4) Dezvoltarea semnalului în S.F.T.

Expresia semnalului este următoarea:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\omega_0 t)$$

Calculul coeficienților:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} A dt = A \frac{t_1}{T} = qA$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} A \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{n\omega_0 T} (\sin(n\omega_0 t))_0^{t_1} = \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \sin(n\omega_0 t_1) = \frac{A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t_1) = \frac{A}{n\pi} \sin(2\pi nq) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} A \sin(n\omega_0 t) dt = -\frac{2A}{n\omega_0 T} (\cos(n\omega_0 t))_0^{t_1} = \\ &= -\frac{2A}{n\omega_0 T} (\cos(n\omega_0 t))_0^{t_1} = -\frac{2A}{n\omega_0 T} (\cos n\omega_0 t_1 - 1) = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos 2\pi nq) \end{aligned}$$

S-a ținut cont de faptul că  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Utilizând funcția  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  (sinus atenuat), expresiile coeficienților dezvoltării trigonometrice sunt următoarele:

$$C_0 = qA ; C_n = 2qA \text{sinc}(2\pi nq) ; S_n = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos 2\pi nq)$$

Forma de undă a funcției  $\text{sinc}(x)$  este prezentată în figura 1.12.

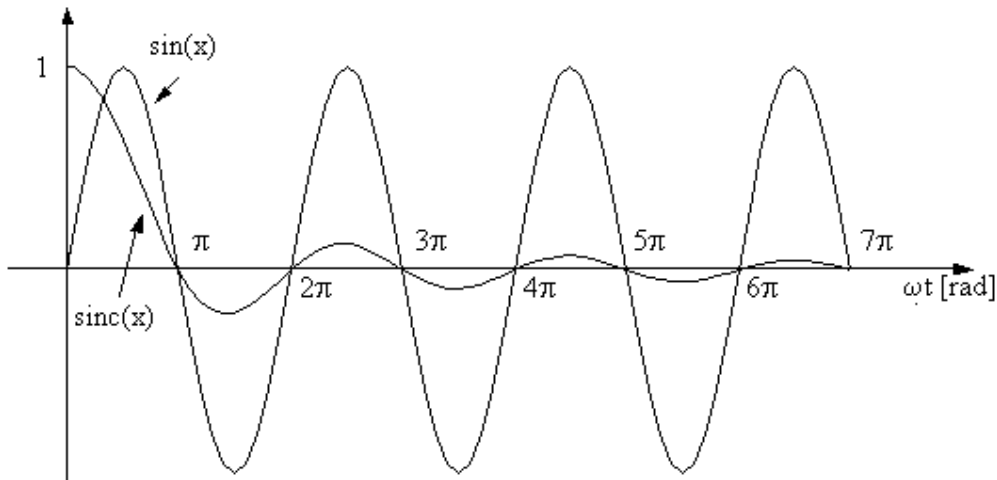


Fig. 1.12 Formele de undă a semnalelor sinus atenuat – sinc(x) – și sin(x)

## 5) Dezvoltarea semnalului în S.F.A.

Expresia semnalului este următoarea:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$



Calculul coeficienților:

$$A_0 = C_0 = qA$$

$$A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2} = \frac{A}{n\pi} \sqrt{2 - 2\cos n\omega_0 t_1} = \frac{4A}{n\omega_0 T} \left| \sin \frac{n\omega_0 t_1}{2} \right| = 2qA \sin c(\pi nq)$$

$$\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{S_n}{C_n} = -\operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \cos 2\pi nq}{\sin 2\pi nq} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{2 \sin^2 \pi nq}{2 \sin \pi nq \cos \pi nq} \right) = -\pi nq$$

Pentru o mai bună înțelegere a scrierii semnalului printr-o serie Fourier se prezintă expresiile desfășurate ale armonicilor.

- Componenta continuă - (la frecvența  $f = 0$ )

$$A_0 = C_0 = qA$$

- Armonica fundamentală (fundamentală) -  $A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

$$\text{la frecvența: } f = f_0 = \frac{1}{T}, n = 1;$$

$$\text{de amplitudine: } A_1 = 2qA \sin c(\pi q) = \frac{2A}{\pi} \sin \pi q;$$

- Armonica de ordinul doi -  $A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$

$$\text{la frecvența: } f = 2f_0 = \frac{2}{T}, n = 2;$$

$$\text{de amplitudine: } A_2 = 2qA \sin c(2\pi q) = \frac{A}{\pi} \sin 2\pi q;$$

- 
- Armonica de ordinul  $k$  -  $A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

$$\text{la frecvența: } f = kf_0 = \frac{k}{T}, n = k;$$

$$\text{de amplitudine: } A_k = 2qA \sin c(k\pi q) = \frac{2A}{k\pi} \sin k\pi q$$

Expresia desfășurată a semnalului  $x(t)$  scris sub forma S.F.A. este următoarea:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \\ &= qA + \frac{2A}{\pi} \sin(\pi q) \cos(\omega_0 t - \pi q) + \frac{A}{\pi} \sin(2\pi q) \cos(2\omega_0 t - 2\pi q) + \dots \\ &\dots + \frac{2A}{k\pi} \sin(k\pi q) \cos(k\omega_0 t - k\pi q) + \dots + \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi q) \cos(n\omega_0 t - n\pi q) + \dots \end{aligned}$$

În cazul în care  $q = \frac{1}{5}$ , expresiile matematice ale primelor cinci armonici și a semnalului aproximat până la a cincea armonică sunt următoarele:

- $A_1(t) = \frac{2A}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{5}\right);$

- $A_2(t) = \frac{2A}{2\pi} \sin\left(\frac{52\pi}{5}\right) \cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\pi}{5}\right);$

- $A_3(t) = \frac{2A}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{5}\right);$

- $A_4(t) = \frac{2A}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \cos\left(4\omega_0 t - \frac{4\pi}{5}\right);$
- $A_5(t) = \frac{2A}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{5}\right) \cos\left(5\omega_0 t - \frac{5\pi}{5}\right) = 0;$

Expresia aproximativă a semnalului (prin însumarea primelor 5 armonici și a componenteii continue) este următoarea:

$$x(t) \approx \frac{A}{5} + \frac{2A}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{5}\right) + \frac{A}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{2A}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{5}\right) + \frac{A}{2\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \cos\left(4\omega_0 t - \frac{4\pi}{5}\right)$$

În figura 1.13 sunt reprezentate formele de undă ale primele patru armonici ale semnalului  $x(t)$ , în cazul în care  $q = \frac{1}{5}$ .

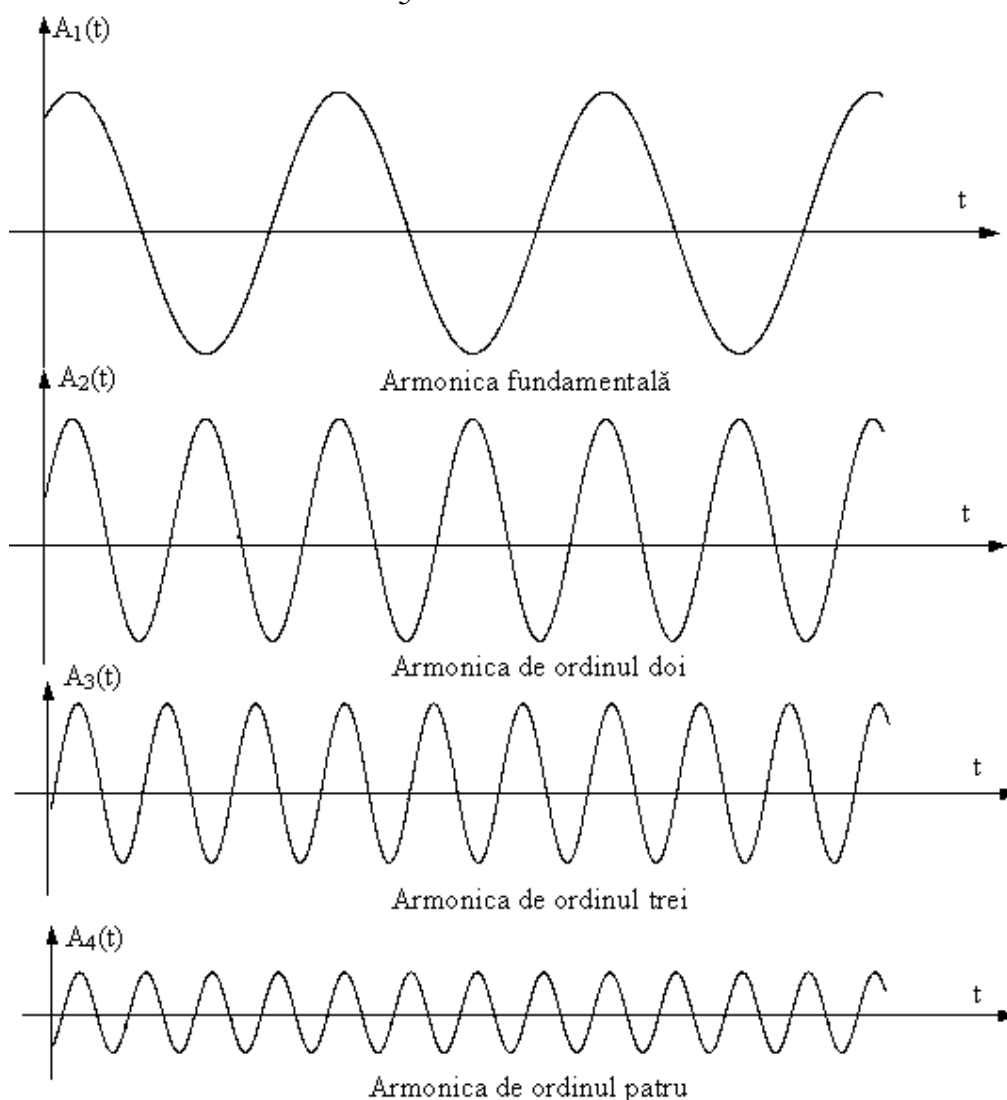


Fig. 1.13 Formele de undă ale primelor patru armonici, corespunzătoare unui semnal dreptunghiular  $x(t)$ , în cazul în care  $q = \frac{1}{5}$

În figura 1.14 este reprezentată forma de undă a semnalului  $x(t)$  comparativ cu cea obținută prin însumarea primelor 5, 10, 15, respectiv 50 de armonici.

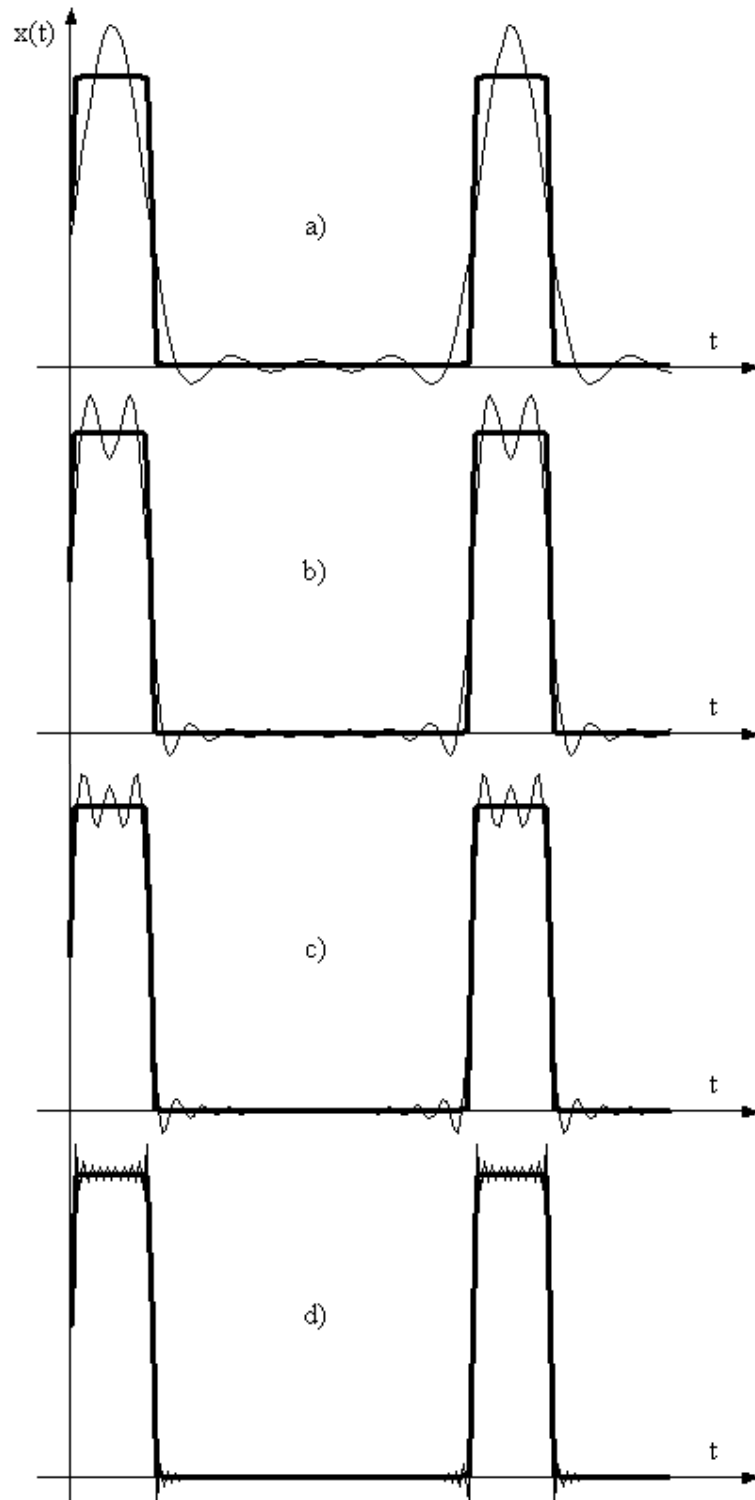


Fig. 1.14 Forma de undă ale semnalului  $x(t)$  comparativ cu cea obținută prin însumarea primelor 5, 10, 15, respectiv 50 de armonici

## 6) Reprezentarea spectrului de amplitudine și de fază

Forma armonică a dezvoltării Fourier oferă posibilitatea de a reprezenta spectrul de amplitudine al semnalului  $A_n = f(\omega)$  sau  $A_n = f(f)$ .

Pentru a realiza această reprezentare grafică se reamintește că:

- Spectrul unui semnal periodic este discret;
- $|A_k| > |A_{k+1}|$   $k \in [1 \dots \infty)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ ;

Pentru acest tip de semnal (dreptunghiular) există armonici a căror amplitudine este nulă. Ordinul, ( $k$ ) al armonicelor care se anulează se determină astfel:

$$A_k = 0 \Rightarrow 2qA \sin c(k\pi q) = 0 \Rightarrow \sin k\pi q = 0 \Rightarrow k\pi q = m\pi \text{ unde } m \in Z \Rightarrow$$

$$k = \frac{m}{q} \quad (1.49)$$

Pentru a realiza reprezentările grafice ale spectrului de amplitudine se consideră cazul particular în care  $q = \frac{1}{5}$ .

În acest caz:

$$A_0 = \frac{A}{5}$$

$$A_n = \frac{2A}{5} \sin c\left(\frac{n\pi}{5}\right) = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi n}{5};$$

În acest caz armonicile de ordin  $k = 5m, m \in N^*$  sunt nule.

$$A_{5k} = 0$$

Calculul amplitudinilor și fazelor corespunzătoare primelor 10 armonicilor este următorul:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{2A}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right); \varphi_1 = -\frac{\pi}{5} \\ A_2 = \frac{A}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right); \varphi_2 = -\frac{2\pi}{5} \\ A_3 = \frac{2A}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right); \varphi_3 = -\frac{3\pi}{5} \\ A_4 = \frac{A}{2\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right); \varphi_4 = -\frac{4\pi}{5} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_6 = -\frac{A}{3\pi} \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right); \varphi_6 = -\frac{6\pi}{5} \\ A_7 = -\frac{2A}{7\pi} \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right); \varphi_7 = -\frac{7\pi}{5} \\ A_8 = \frac{A}{4\pi} \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right); \varphi_8 = -\frac{8\pi}{5} \\ A_9 = \frac{2A}{9\pi} \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right); \varphi_9 = -\frac{9\pi}{5} \end{array} \right. \dots$$

Reprezentările grafice ale spectrului de amplitudine, respectiv a modulului spectrului de amplitudine sunt prezentate în figurile 1.15. respectiv 1.16.

Observație:

Cu linie punctată este reprezentată înfășurătoarea (anvelopa) spectrului. Din analiza formei înfășurătoarei se pot obține două informații:

- Punctele de trecere prin zero ale înfășurătoarei semnifică valorile frecvenței armonicelor a căror amplitudine se anulează.
- Amplitudinile armonicelor sunt situate între axa absciselor și înfășurătoare. În acest mod se poate observa tendința de variație (scădere) a amplitudinilor odată cu creșterea frecvenței armonicelor.

În figura 1.15 se observă că există armonici ce au o amplitudine negativă. Acestea nu au nicio semnificație fizică. Din acest motiv uzual se reprezintă modulul spectrului de amplitudine.

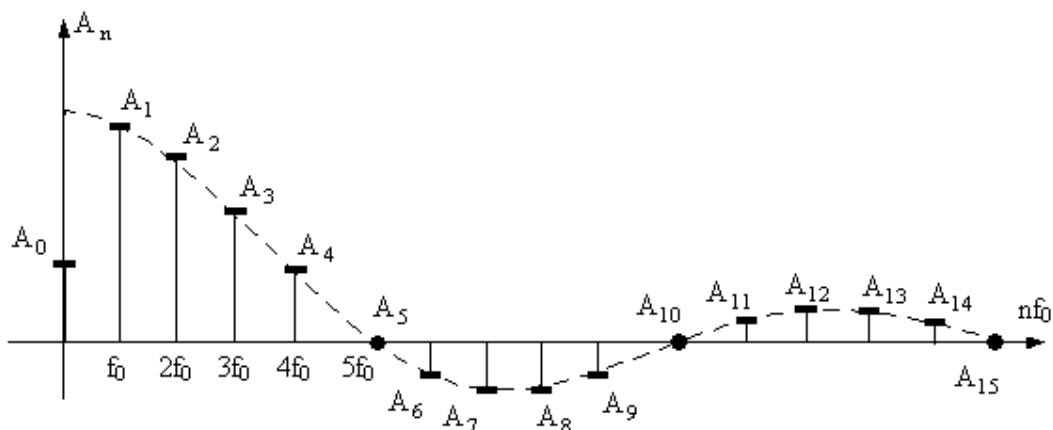


Fig. 1.15 Spectrul de amplitudini al unui semnal periodic dreptunghiular ( $q = \frac{1}{5}$ )

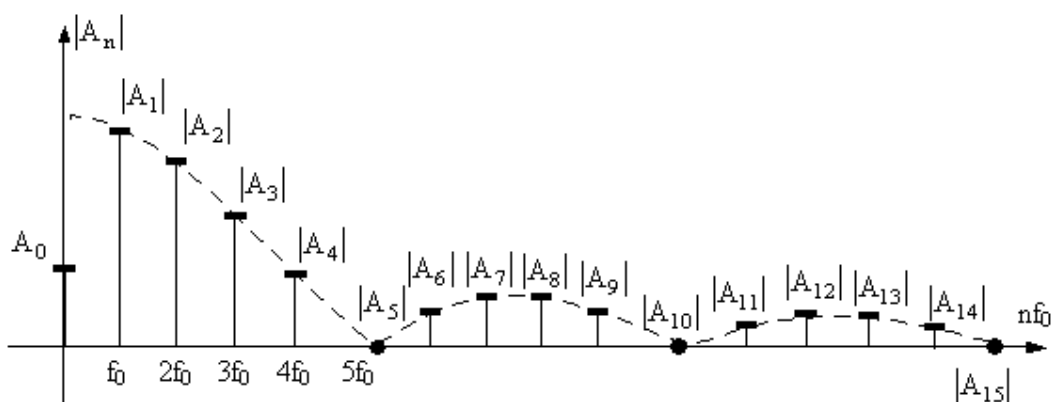


Fig. 1.16 Modulul spectrului de amplitudini al unui semnal periodic dreptunghiular

7) Determinarea lărgimii de bandă a semnalului;

În cazul semnalului periodic dreptunghiular, se consideră că limita superioară a benzii este egală cu frecvența primei armonici a cărei amplitudine este nulă. Conform (1.49) primul punct de trecere prin zero al spectrului sau prima trecere prin zero a înfășurătoarei semnalului se obține pentru  $m = 1$ . În concluzie

$$B = \left[ 0, \frac{f_0}{q} \right] [\text{Hz}] \tag{1.50}$$

Conform (1.50) rezultă că pentru reconstituirea semnalului este suficientă reținerea armonicilor situate în primul “lob” al înfășurătoarei spectrului semnalului (figura 1.15 și 1.16). Numărul armonicelor cuprinse în banda de frecvență este dat de expresia:

$$\left[ \frac{1}{q} - 1 \right] \tag{1.51}$$

Conform figurii 1.14 a), se observă că pentru refacerea semnalului dreptunghiular este suficient a se recepționa doar primele patru armonici ale semnalului. Ulterior acest semnal este prelucrat electronic pentru a se obține un semnal dreptunghiular. Reținerea doar a unei părți (banda de frecvență) din spectrul infinit al unui semnal periodic se realizează cu ajutorul unui filtru trece bandă (F.T.B.). Acesta este un circuit electronic ce atenuează componentele spectrale ce se consideră a fi inutile în cadrul unui proces de recepție.

## 1.6. Analiza spectrală a semnalelor neperiodice

### 1.6.1. Noțiuni introductive. Transformata Fourier

Semnalul neperiodic poate fi considerat un caz limită al unui semnal periodic, la care perioada tinde spre infinit. **Cum în cazul semnalelor periodice trecerea din domeniul timp, în domeniul frecvență se realizează prin intermediul seriilor Fourier, în cazul semnalelor neperiodice legătura dintre cele două domenii se realizează prin intermediul transformatei Fourier.**

Se reamintesc următoarele expresii matematice:

Transformata Fourier directă a unui semnal neperiodic  $x(t)$  (impuls) este:

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.52)$$

Transformata Fourier inversă sau originalul  $x(t)$  se obține cu relația:

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.53)$$

Impulsul este un semnal determinist, de durată finită. Se poate afirma că toate semnalele deterministe sunt impulsuri, deoarece, în realitate duratele acestora sunt finite. Conform paragrafului 1.5. s-a văzut că este util (în unele cazuri) ca semnalul să fie definit pe intervalul  $t \in (-\infty, \infty)$ , asociindu-i-se funcții periodice în timp.

Impulsul este un semnal neperiodic, dar trebuie precizat că nu orice semnal neperiodic este impuls. De exemplu un semnal întâmplător, cu durată finită sau infinită este neperiodic dar nu constituie un impuls.

În figura 1.17 sunt prezentate câteva forme tipice de impulsuri. În toate cele trei cazuri prezentate limitele domeniului lor de existență,  $t_1, t_2$ , sunt finite.

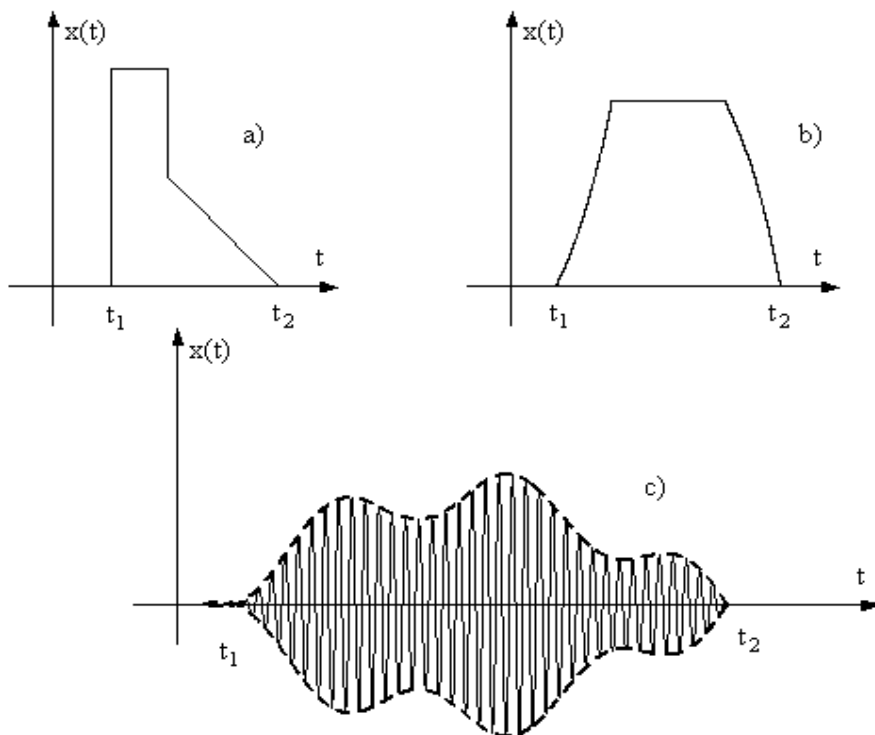


Fig.1.17 Impulsuri; a) impuls exprimat printr-o succesiune de segmente; b) impuls de formă oarecare, cu variație continuă; c) impuls de radiofrecvență

Analizând îndeplinirea condițiilor matematice necesare analizei, pot fi considerate ca impulsuri și semnalele la care unul sau ambele momente  $t_1, t_2$  sunt infinite.

În figura 1.18 se prezintă câteva din aceste impulsuri.

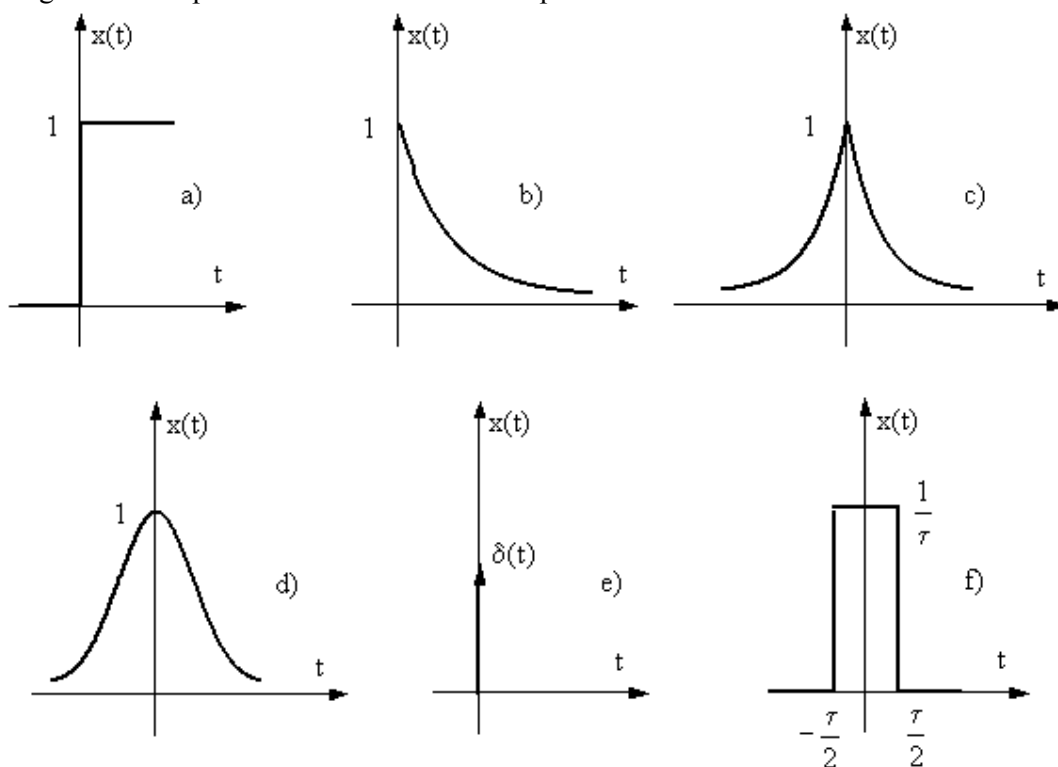


Fig.1.18 Impulsuri; a) impulsul treaptă unitate; b) impulsul exponențial; c) impulsul exponențial simetric; d) clopotul lui Gauss; e) impulsul Dirac; f) impuls dreptunghiular simetric cu aria egală cu unitatea.

➤ impulsul treaptă unitate:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \text{ momentul } t_2 \text{ este infinit}; \quad (1.54)$$

➤ impulsul exponențial:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0, \text{ momentul } t_2 \text{ este infinit}; \quad (1.55)$$

➤ impulsul exponențial simetric:

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \text{ momentele } t_1, t_2 \text{ sunt infinite}; \quad (1.56)$$

➤ clopotul lui Gauss:

$$x(t) = e^{-\alpha t^2}, \text{ momentele } t_1, t_2 \text{ sunt infinite}; \quad (1.57)$$

➤ impulsul Dirac (funcția impuls unitate):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} ; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.58)$$

### A. Impulsul Dirac

Se observă că impulsul Dirac nu este definit printr-o funcție de timp în sensul matematic obișnuit, caracteristica lui fiind aceea că are durată nulă, amplitudine infinită și integrala pe orice domeniu simetric față de ordonată egală cu unitatea.  $\delta(t)$  poate fi

considerat ca o limită a succesiunii de impulsuri  $p_\tau(t)$ , de durată  $\tau$  și amplitudine  $\frac{1}{\tau}$ , atunci când  $\tau \rightarrow 0$  (vezi figura 1.19).

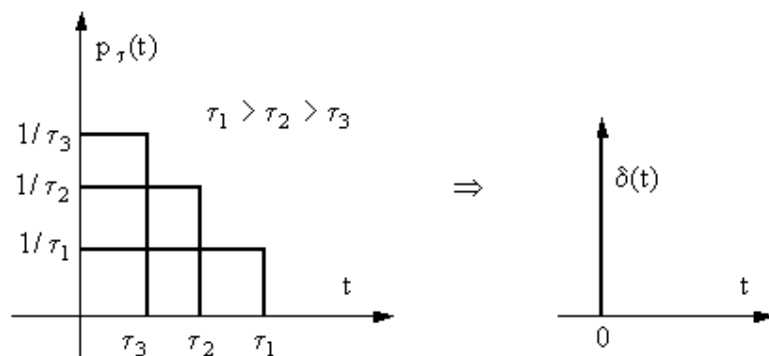


Fig.1.19 Definirea funcției impuls unitate (Dirac) prin trecerea la limită de la un impuls dreptunghiular cu aria egală cu unitatea.

Pe măsură ce durata impulsului  $p_\tau(t)$  tinde spre zero,  $\tau \rightarrow 0$ , acesta se îngustează, la limită localizându-se la  $t = 0$ . În tot acest proces de trecere la limită suprafața impulsului dreptunghiular se păstrează constantă și egală cu unitatea, pe seama creșterii amplitudinii, care tinde la  $\infty$  când  $\tau$  tinde la zero.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} p_\tau(t) = \delta(t) \quad (1.59)$$

Impulsul dreptunghiular poate fi scris cu ajutorul funcțiilor (impulsurilor) treaptă unitate, astfel:

$$p_\tau(t) = \frac{1}{\tau_k} [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_k)] \quad (1.60)$$

Din (1.59) și (1.60), rezultă că:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - \tau_k)}{\tau_k} \quad (1.61)$$

În expresia (1.61) se identifică derivata funcției treptă unitate, astfel încât se poate scrie că:

$$\delta(t) = \frac{d(\sigma(t))}{dt} = \sigma'(t) \quad (1.62)$$

Observații:

➤ Derivata funcției treptă unitate este zero pe tot domeniul ei de definiție, cu excepția punctului de discontinuitate  $t = 0$  unde, din punct de vedere matematic derivata nu ar trebui să existe. Utilizând funcția (impulsul) Dirac s-a identificat derivata treptei unitate în punctul de discontinuitate  $t = 0$ , ca fiind însuși impulsul Dirac localizat în  $t = 0$ .

➤ Se demonstrează că derivata unei funcții într-un punct de discontinuitate  $t_0$  este un impuls Dirac localizat în acel punct, ponderat cu mărimea discontinuității funcției în acel punct. Această proprietate va conduce la calcule mult mai simplificate în analiza spectrală a semnalelor cu discontinuități. Spre exemplu pentru semnalul  $p_\tau(t)$  reprezentat în figura

1.18 f), derivatele în punctele de discontinuitate  $\pm \frac{\tau}{2}$  au valorile  $\pm \frac{1}{\tau} \delta\left(t \pm \frac{\tau}{2}\right)$ .

Impulsul Dirac se bucură de proprietatea de eșantionizare, exprimată de integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$



## B. Determinarea expresiei transformatei Fourier directă

În continuare se prezintă o metodă de deducere a expresiei (1.52).

Așa cum s-a precizat anterior semnalele neperiodice pot fi considerate un caz limită al semnalelor periodice și anume atunci când perioada  $T$  tinde la infinit. Această trecere la limită poate fi imaginată astfel: fiind dat semnalul neperiodic  $x(t)$ , figura 1.20a), limitat pe axa timpului, se face o prelungire periodică a acestui semnal, notat  $x_T(t)$ , figura 1.20b), de perioadă  $T$ .

La limită, când  $T$  tinde la infinit, semnalul periodic va avea doar o perioadă pe întreg domeniul de timp și va fi reprezentat doar prin  $x(t)$ .

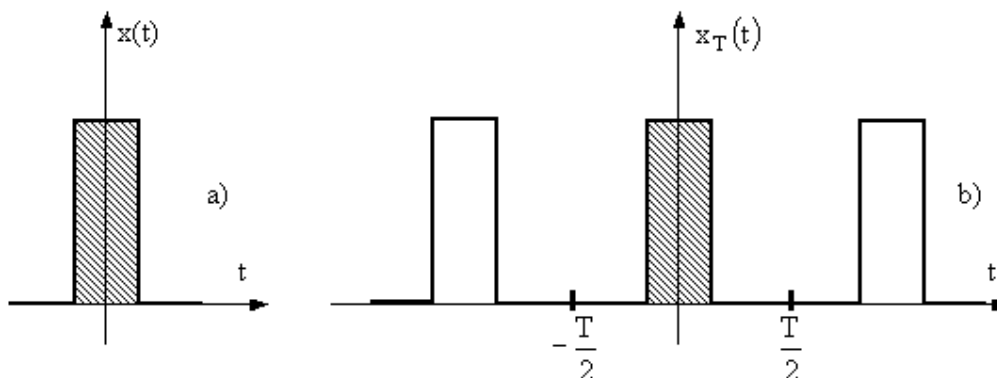


Fig.1.20 Periodicizarea unui semnal neperiodic

Semnalul  $x_T(t)$  poate fi dezvoltat prin seria Fourier armonică. Această serie îl reprezintă pe  $x_T(t)$  pe tot intervalul, iar pe  $x(t)$  numai pe intervalul  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ .

La limită, când  $T$  tinde la infinit, seria corespunzătoare lui  $x_T(t)$  îl reprezintă pe  $x(t)$  pe întreg domeniul  $-\infty < t < +\infty$ .

Pentru semnalul periodic se scrie seria armonică Fourier,  $x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t}$ ,

unde expresiile coeficienților (amplitudinilor) au expresia  $A_{nc} = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ .

Deoarece pe o perioadă, intervalul  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ , funcțiile  $x_T(t)$  și  $x(t)$  sunt identice se poate scrie că:

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

În concluzie se poate scrie că:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \omega_0 \quad (1.63)$$

Când  $T$  este foarte mare, frecvența unghiulară  $\omega_0$  este foarte mică. Se notează  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$  și se observă că mărimea  $n\omega_0 = n\Delta\omega$ , corespunde unor puncte echidistante, separate de intervale foarte mici pe axa frecvenței,  $\omega_n = n\Delta\omega$

În conformitate cu aceste notații, (1.63) devine:

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega_n t} dt \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega \quad (1.64)$$

La limită  $T \rightarrow \infty$ , semnalul periodic este identic cu semnalul neperiodic,  $x_T(t) \rightarrow x(t)$ , iar  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ .

Deoarece  $\omega_n$  poate lua acum orice valoare pe axa frecvenței, se va nota  $\omega_n = \omega$  și de asemenea din punct de vedere matematic se observă că  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$ .

În aceste condiții (1.64) devine:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} d\omega \right] d\omega \quad (1.65)$$

În cea de a doua integrală au fost extinse limitele integrării la intervalul  $(-\infty, \infty)$  deoarece în afara intervalului  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  impulsul  $x(t)$  are valori nule.

Se notează  $F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ , funcție ce poartă numele de transformată Fourier a semnalului  $x(t)$ , iar  $F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$  se numește transformată Fourier inversă.

Proprietățile transformatei Fourier sunt următoarele:

$$\text{➤ Liniaritatea: } F\left\{ \sum_k a_k x_k(t) \right\} = \left\{ \sum_k a_k X_k(j\omega) \right\} \quad (1.66)$$

$$\text{➤ Schimbarea scării timpului: } F\left\{ x\left(\frac{t}{a}\right) \right\} = |a| X(j\omega a) \quad (1.67)$$

$$\text{➤ Întârzierea în timp: } F\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (1.68)$$

$$\text{➤ Deplasarea spectrului (modularea): } F^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\} = e^{j\omega_0 t} x(t) \quad (1.69)$$

$$\text{➤ Derivarea în timp: } F\{x'(t)\} = j\omega X(j\omega) ; F\{x^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n X(j\omega) \quad (1.70)$$

$$\text{➤ Derivarea în domeniul frecvență: } F^{-1}\{X'(j\omega)\} = (-jt)x(t) \quad (1.71)$$

$$\text{➤ Integrarea în timp: } F\left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} \quad (1.72)$$

$$\text{➤ Integrarea în domeniul frecvență: } F^{-1}\left\{ \int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda) d\lambda \right\} = -\frac{1}{jt} x(t) \quad (1.73)$$

### 1.6.2. Analiza spectrală a semnalelor neperiodice. Mod de lucru.

Pornind de la ideea că semnalul neperiodic este un semnal periodic cu perioadă  $T$  infinită, frecvența fundamentală  $f_0$  devine tot mai mică, spectrul tot mai dens, la limită nemaiputându-se face nici o discriminare între două componente spectrale succesive, spectrul existând pentru orice pulsație  $\omega$  (sau frecvență  $f$ ).

**Spectrul unui semnal neperiodic este un spectru continuu.**

Expresia (1.52)  $F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$  poartă numele de funcție spectrală,

sau densitate spectrală de amplitudine complexă.

Din (1.52) și (1.64) se obține:

$$x_T(t) \approx x(t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X(j\omega_n) \Delta\omega] e^{j\omega_n t}$$

Această aproximație este cu atât mai bună cu cât  $T$  este mai mare și  $\Delta\omega$  este mai mic. Se observă că impulsul  $x(t)$  se exprimă ca sumă de oscilații armonice. Aceste oscilații armonice au următoarele caracteristici:

➤ Frecvențele unghiulare sunt egale cu  $\omega_n = n\Delta\omega$ , fiind foarte apropiate unele de altele pe axa frecvenței;

➤ Amplitudinile sunt egale cu  $\frac{1}{2\pi} X(j\omega_n) \Delta\omega$ ;

Conform observației făcute asupra valorii amplitudinii oscilațiilor rezultă că mărimea  $X(j\omega_n) \approx X(j\omega)$  se exprimă ca raportul dintre o amplitudine și intervalul de frecvență  $\Delta\omega$ . Este deci firească denumirea de densitate spectrală de amplitudine complexă sau densitate de amplitudine, dată funcției  $X(j\omega)$ .

Asupra funcției de densitate spectrală de amplitudine se pot face următoarele observații:

➤ Funcția de densitate spectrală este continuă, ea existând pentru orice  $\omega(f)$ .

➤ Funcția de densitate spectrală este o funcție complexă, putând fi scrisă sub formă de modul și fază, astfel:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.74)$$

unde:

$|X(j\omega)| = M(\omega)$  reprezintă modulul densității spectrale de amplitudine (spectrul de amplitudini);

$\varphi(\omega)$  reprezintă spectrul de fază;

Deoarece funcția de densitate spectrală este o funcție complexă se poate scrie că:

$$X(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) \quad (1.75)$$

unde:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt ; B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (1.76)$$

în acest caz se poate scrie că:

$$M(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (1.77)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (1.78)$$

a) Dacă funcția  $x(t)$  este pară, atunci:

$$B(\omega) = 0 \Rightarrow X(j\omega) = A(\omega) \quad (1.79)$$

rezultând că funcția de densitate spectrală este o funcție reală.

b) Dacă funcția  $x(t)$  este impară, atunci:

$$A(\omega) = 0 \Rightarrow X(j\omega) = -jB(\omega) \quad (1.80)$$

rezultând că funcția de densitate spectrală este o funcție pur imaginară.

► Energia  $E$  a impulsului este dată de relația:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.81)$$

Mărimea  $|X(j\omega)|^2 = G(\omega)$  se numește densitate spectrală de energie a impulsului.

Relația (1.81) constituie teorema lui Parseval aplicată impulsurilor. Demonstrația teoremei este următoarea:

Se observă că:  $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)X(-j\omega) d\omega$ , mărime ce va fi notată cu  $I$ .

Conform (1.52) relația de mai sus devine:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega.$$

Schimbând ordinea de integrare, se obține:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt,$$

iar pe baza (1.58) se deduce că:

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt.$$

Considerând că impulsul este o tensiune sau un curent aplicat unei rezistențe  $R = 1\Omega$ , energia totală debitată are expresia  $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ . În conformitate cu notațiile de mai sus rezultă că:

$$E = \frac{1}{2\pi} I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Echivalând integrala cu o sumă de termeni, rezultă că funcția  $|X(j\omega)|^2$  este o densitate spectrală de energie pe axa frecvenței.

$$E \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \Delta\omega \approx \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 \Delta\omega$$

### 1.6.3. Algoritm utilizat în analiza spectrală a semnalelor neperiodice

Pentru a realiza analiza spectrală a semnalelor neperiodice trebuie realizat un studiu asupra absolut integrabilității funcției  $x(t)$ .

#### A. Funcția $x(t)$ este absolut integrabilă.

În cazul în care funcția este absolut integrabilă, este îndeplinită condiția:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.82)$$

Interpretarea fizică a condiției (1.82) este aceea că aria cuprinsă între curba  $x(t)$  și axa absciselor, calculată între limitele de existență (definire) ale semnalului este finită.

Restricția (1.82) implică faptul că densitatea spectrală de amplitudine a semnalului  $x(t)$  (dată de 1.52) este finită, putând fi calculată. Această observație este justificată matematic astfel:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \quad (1.83)$$

În cazul funcțiilor absolut integrabile se pot identifica două tipuri de impulsuri:

### A1. Impulsuri cu valori și durate finite.

Analiza spectrală se realizează aplicându-se transformata Fourier. Calculul densității spectrale de amplitudine este de obicei simplu deoarece impulsurile sunt date prin expresii analitice clasice (segmente de drepte, exponențiale, funcții trigonometrice...).

### A2. Impulsuri definite pe întreg domeniul: $t \in (-\infty, \infty)$ .

Acestea nu sunt impulsuri în adevăratul sens al cuvântului, dar respectând condiția (1.82), poate fi calculată densitatea lor de amplitudine. Un astfel de exemplu îl constituie impulsul exponențial prezentat în figura 1.18b). Cum

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

rezultă că funcția este absolut integrabilă (în ipoteza că  $\alpha > 0$  și finit) și se poate aplica transformata Fourier.

Pentru a calcula densitatea spectrală se propun următoarele două metode:

a) Calcularea transformatei Fourier:  $F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

Algoritmul de lucru este următorul:

- 1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;
  - 2) Reprezentarea grafică a evoluției în timp a semnalului;
  - 3) Analiza simetriei semnalului;
  - 4) Calculul funcției de densitate spectrală a semnalului,  $X(j\omega)$ ;
  - 5) Calculul modulului densității spectrale de amplitudine  $|X(j\omega)| = M(\omega)$ ;
  - 6) Reprezentarea grafică a modulului densității spectrale de amplitudine  $|X(j\omega)| = M(\omega)$ ;
  - 7) Determinarea lărgimii de bandă a semnalului;
  - 8) Calculul densității spectrale de energie a impulsului  $G(\omega)$
- b) Aplicarea proprietăților transformatei Fourier.

Prin această metodă se pot simplifica în mod substanțial calculele matematice

### B. Funcția $x(t)$ nu este absolut integrabilă.

Restricția (1.82) este suficientă dar nu și necesară deoarece lipsa absolutei integrabilități nu implică lipsa de sens a integralei (1.52) (transformata Fourier a semnalului).

Se vor prezenta câteva exemple în care se va calcula densitatea spectrală de amplitudine pentru impulsuri a căror expresie analitică este o funcție ce nu este absolut integrabilă. Un astfel de impuls este treapta unitate prezentat în figura 1.18a).

În acest caz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_0^{\infty} 1 dt = 1 \int_0^{\infty} dt = \infty \quad (1.84)$$

Metoda propusă pentru obținerea densității spectrale în cazul acestor impulsuri este de a calcula transformata Fourier prin trecerea la limită a transformatelor unor impulsuri care sunt absolut integrabile.

#### 1.6.4. Exemple de analiză spectrală a impulsurilor

##### Analiza spectrală a unor impulsuri fundamentale

###### 1. Analiza spectrală a impulsului Dirac

Impulsul Dirac este definit conform (1.58), astfel:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} ; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

###### Metoda I

Se calculează transformata Fourier

Transformata impulsului Dirac este următoarea:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.85)$$

În figura 1.21 este prezentat impulsul Dirac și transformata Fourier a acestuia.

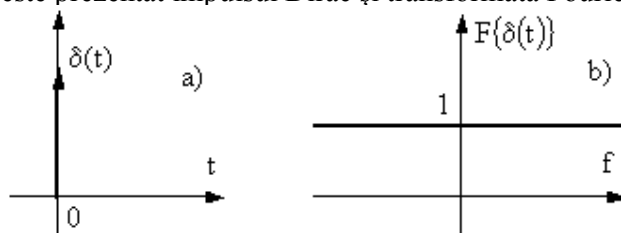


Fig.1.21a) Impulsul Dirac, b) Funcția de densitate spectrală a impulsului Dirac

Cum densitatea de amplitudine sau de energie este constantă pe întreg domeniul de frecvență, rezultă că energia impulsului Dirac este infinită, lucru ce implică faptul că acest semnal nu este realizabil din punct de vedere fizic.

După cum s-a prezentat în figura 1.19, impulsul Dirac poate fi doar aproximat prin impulsuri de durate foarte mici  $\tau \rightarrow 0$ , cu amplitudini foarte mari  $\frac{1}{\tau}$ .

###### Metoda II

O variantă (dar nu singura) de a determina transformata Fourier a impulsului Dirac este de a-l aproxima prin așa numită funcție de eșantionare:

$$f_e(t) = \frac{k}{\pi} \sin c(kt) \quad (1.86)$$

Conform reprezentărilor grafice ale funcției de eșantionare din figura 1.22, se observă că atunci când valoarea lui  $k$  se mărește, lobul principal al funcției se îngustează, valoarea lui maximă crescând.

Se demonstrează că aria funcției de eșantionare este egală cu unitatea, observație ce este în concordanță cu definiția (1.58) dată impulsului Dirac.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi} \frac{\sin(kt)}{kt} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{kt} d(kt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv$$

Se reamintește expresia funcției sinus integral:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(v)}{v} dv \quad (1.87)$$

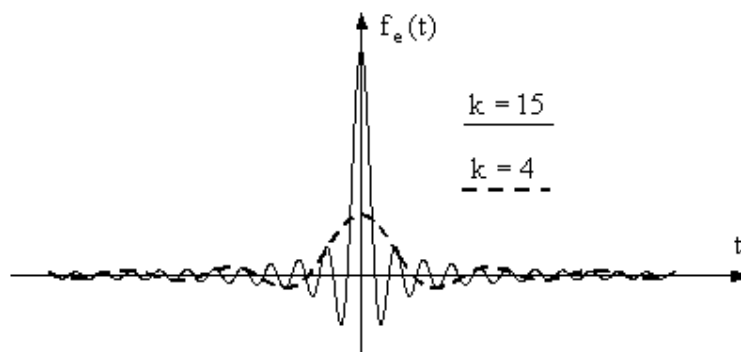


Fig.1.22 Funcția de eșantionare  $f_e(t) = \frac{k}{\pi} \sin c(kt)$  reprezentată pentru două valori ale parametrului  $k$ .

Valorile funcției sinus integral sunt tabelate, reprezentarea grafică fiind prezentată în figura 1.23.

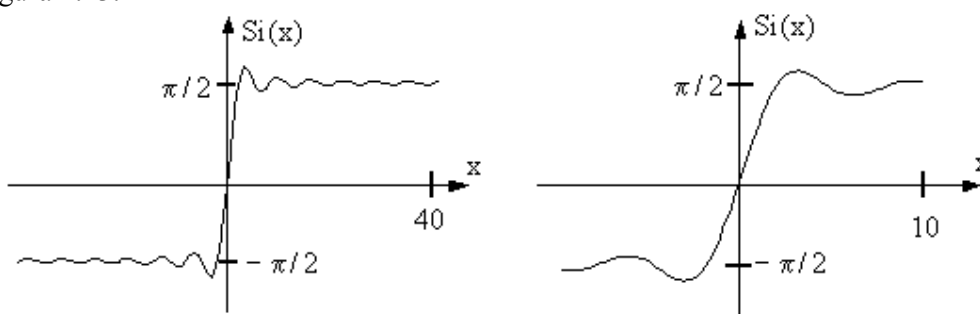


Fig.1.23 Funcția sinus integral  $Si(x)$

Conform (1.87) expresia ariei funcției de eșantionare devine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv - \int_0^{-\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} [Si(+\infty) - Si(-\infty)] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1$$

În acest caz transformata Fourier a impulsului Dirac devine:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) e^{-j\omega t} dt$$

Cum funcția de eșantionare este pară, rezultă:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt) \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kt)}{t} \cos(\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[(k+\omega)t]}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[(k-\omega)t]}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[(k+\omega)t]}{(k+\omega)t} d[(k+\omega)t] + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin[(k-\omega)t]}{(k-\omega)t} d[(k-\omega)t] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{(k+\omega)t=\infty} \frac{\sin v}{v} dv + \frac{1}{\pi} \int_0^{(k-\omega)t=\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{\pi} [2Si(\infty)] = \frac{1}{\pi} \left( 2 \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

## 2. Analiza spectrală a impulsului treaptă unitate

Impulsul treaptă unitate este definit conform (1.54), astfel:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \text{ momentul } t_2 \text{ este infinit;}$$

Conform (1.82) nu este un impuls absolut integrabil. În acest caz, așa cum s-a afirmat anterior, metoda propusă pentru obținerea densității spectrale este de a calcula transformata Fourier prin trecerea la limită a transformatei unui impuls care este absolut integrabil.

S-a ales ca impuls a cărui transformată se poate calcula, impulsul exponențial:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0, \text{ momentul } t_2 \text{ este infinit;}$$

Conform reprezentării grafice din figura 1.24, se observă că la limită,  $\alpha \rightarrow 0$ , impulsul exponențial se transformă în impuls treaptă unitate.

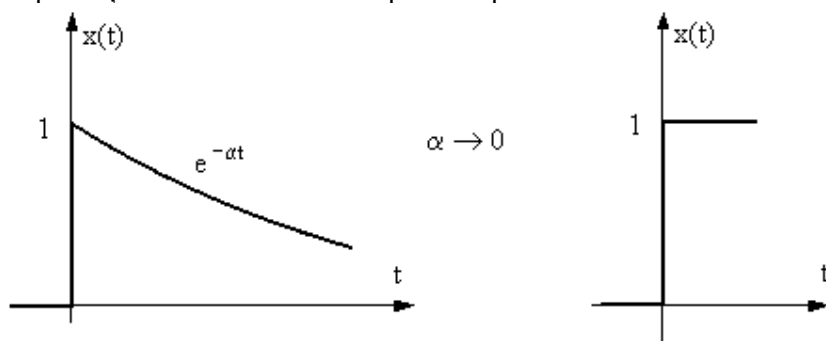


Fig. 1.24 Obținerea impulsului treptă unitate din impulsul exponențial

Transformat Fourier a impulsului exponențial are următoarea expresie:

$$F\{e^{-\alpha t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (1.88)$$

Se observă că în cazul în care  $\omega = 0$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = \infty$ , ceea ce ar arăta că transformata Fourier a impulsului treptă unitate nu există.

În acest caz se utilizează următorul artificiu matematic:

Se scrie

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Studiul trecerii la limită,  $\alpha \rightarrow 0$ , pentru partea imaginară

Se observă că:

$$\text{Im} \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = 0; \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \omega \neq 0}} \text{Im} \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \omega \neq 0}} \left( -j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{1}{j\omega} \quad (1.89)$$

Partea reală a transformatei Fourier a impulsului exponențial poate fi scrisă ca un impuls a cărui reprezentare grafică este prezentată în figura 1.25. Reprezentarea grafică sugerează că la limită ar putea fi aproximat prin impulsul Dirac ponderat cu o constantă.

Pentru a se demonstra matematic această observație se calculează aria impulsului.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + v^2} dv = (\text{arctg } v) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \quad (1.90)$$



Cum aria impulsului este o mărime constantă independentă de parametrul  $\alpha$  rezultă că:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \pi \delta(\omega) \quad (1.91)$$

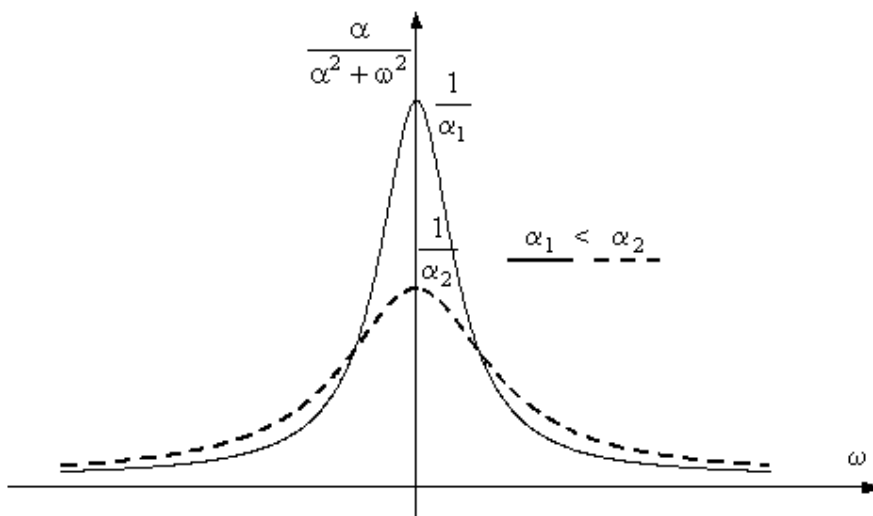


Fig.1.25 Funcția  $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

În concluzie, din (1.89) și (1.91) rezultă că transformata Fourier a impulsului treaptă unitate are expresia:

$$F\{\sigma(t)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [F\{e^{-\alpha t}\}] = \pi \delta(t) + \frac{1}{j\omega} \quad (1.92)$$

În literatură se întâlnește și scrierea:

$$F\{\sigma(t)\} = \begin{cases} \pi \delta(t) & \omega = 0 \\ \frac{1}{j\omega} & \omega \neq 0 \end{cases} \quad (1.93)$$

În figura 1.26 este prezentat modulul densității spectrale de amplitudine al impulsului treaptă unitate.

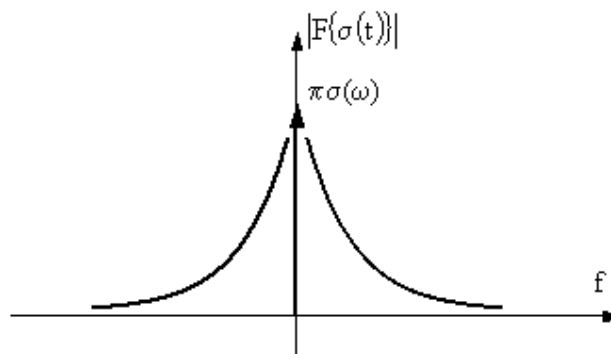


Fig.1.26 Modulul densității spectrale de amplitudine al impulsului treaptă unitate.

## A. Analiza spectrală a impulsurilor absolut integrabile

### A1. Analiza spectrală a impulsului video simetric

#### Metoda I

1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;

$$x_v(t) = \begin{cases} A & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \text{ sau } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \text{ sau } |t| \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

2) Reprezentarea în timp a semnalului este prezentată în figura 1.27.

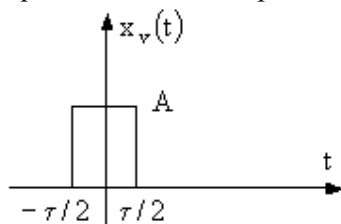


Fig.1.27 Impuls video simetric

3) Analiza simetriei semnalului;

Cum  $x(t) = x(-t) \Rightarrow x(t)$  este pară, adică  $B(\omega) = 0 \Rightarrow X(j\omega) = A(\omega)$

4) Calculul funcției de densitate spectrală a semnalului;

$$X_v(j\omega) = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2A \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}$$

sau

$$X_v(j\omega) = \tau A \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \quad (1.94)$$

5) Calculul modulului densității spectrale de amplitudine

$$|X_v(j\omega)| = \left| \tau A \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \right| \quad (1.95)$$

6) Reprezentarea grafică a modulului densității spectrale de amplitudine

Modul densității spectrale de amplitudine este prezentată în figura 1.28

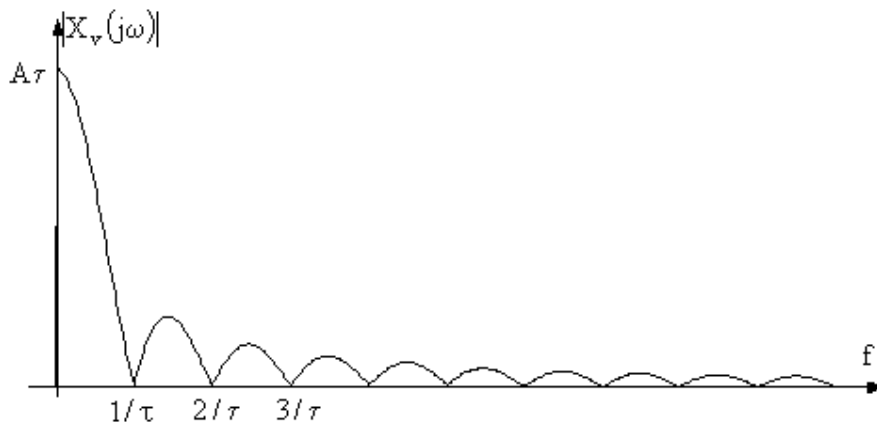


Fig.1.28 Modulul densității spectrale de amplitudine a semnalului video simetric

În cazul în care se reprezintă funcția de densitate spectrală a semnalului, se obține o reprezentare ilustrată în figura 1.29.

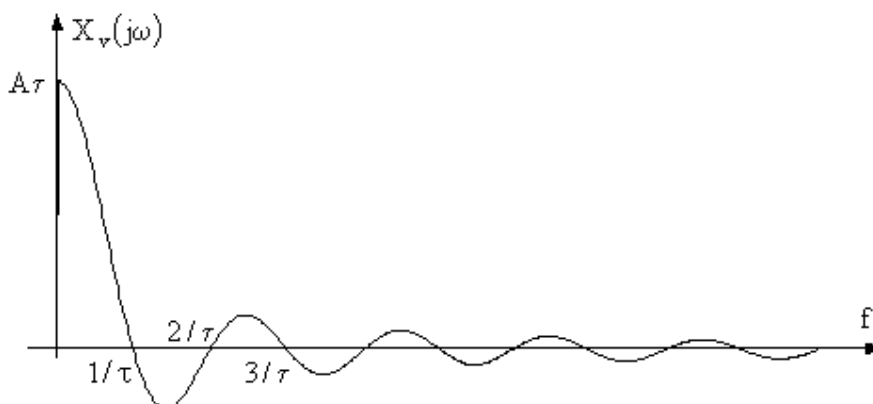


Fig.1.29 Densitatea spectrală de amplitudine a semnalului video simetric

#### 7) Determinarea lărgimii de bandă a semnalului

În cazul acestui semnal se consideră că lărgimea lui de bandă se întinde de la zero până la prima frecvență la care spectrul de amplitudini se anulează. Determinarea expresiei acestei frecvențe implică următoarele calcule:

$$X(j\omega) = A\tau \sin c \frac{\omega\tau}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\omega\tau}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\omega\tau}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{\tau} \Rightarrow f = \frac{k}{\tau} \quad k \in \mathbb{N}$$

Deci,

$$B = \left[ 0, \frac{1}{\tau} \right] [\text{Hz}] \quad (1.96)$$

Observație:

- Banda (lărgimea de bandă) depinde doar de durata impulsului;
- Cu cât durata impulsului este mai mare cu atât banda de frecvență este mai mică (îngustă) și amplitudinea spectrală mai mare;

Cu cât durata impulsului este mai mică cu atât banda de frecvență este mai mare (largă) și amplitudinea spectrală mai mică.

Densitatea spectrală de energie a impulsului

$$G(\omega) = |X(j\omega)|^2 = \tau^2 \sin^2 c \frac{\omega\tau}{2} \quad (1.97)$$

#### Metoda II

**Se procedează la o derivare succesivă, punând în evidență, treptat, impulsurile Dirac, corespunzătoare derivării discontinuităților.**

**Impulsurile Dirac extrase sunt lăsate la o parte când se trece la o nouă derivare. Operația de derivare se continuă până când derivata respectivă se exprimă ca o sumă de impulsuri Dirac.**

**Parcurgând apoi drumul în sens invers și scriind transformatele Fourier ale impulsurilor Dirac, se deduce pas cu pas, funcția spectrală căutată.**

În figura 1.30 este reprezentat procedeul de evidențiere a impulsurilor Dirac rezultate în urma derivării impulsului video simetric.

Se observă - figura 1.30 b)- că impulsul video simetric poate fi scris ca sumă de impulsuri treaptă unitate, astfel:

$$x_v(t) = \left[ A \sigma \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \right] + \left[ -A \sigma \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (1.98)$$

Aplicând observația (1.62) - derivata unei funcții într-un punct de discontinuitate  $t_0$  este un impuls Dirac localizat în acel punct, ponderat cu mărimea discontinuității funcției în acel punct - asupra expresiei (1.96) rezultă:

$$x'_v(t) = \left[ A \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right] + \left[ -A \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1.99)$$

În figura 1.30c) se pun în evidență impulsurile Dirac ce apar ca urmare a derivării celor două funcții treptă unitate.

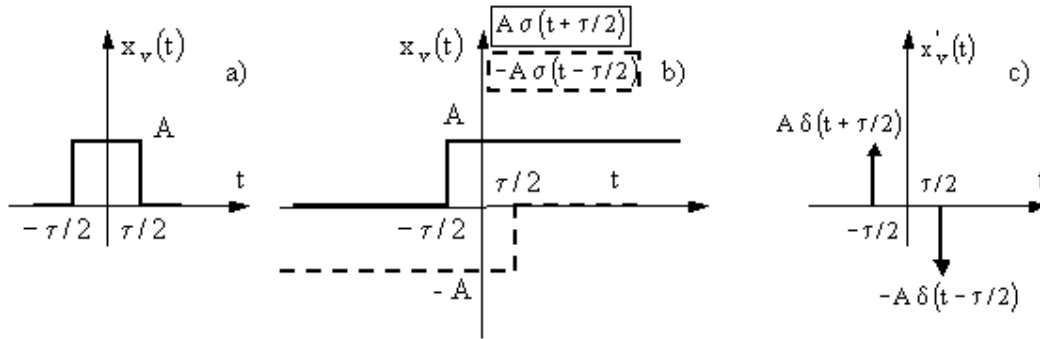


Fig.1.30 Evidențierea impulsurilor Dirac în urma derivării impulsului video simetric

Se parcurge drumul în sens invers, aplicând transformatele Fourier derivatei de ordinul I al impulsului video simetric.

$$\begin{aligned} F\{x'_v(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= A \int_{-\infty}^{t+\frac{\tau}{2}=v} \delta(v) e^{-j\omega\left(v-\frac{\tau}{2}\right)} dv - A \int_{-\infty}^{t-\frac{\tau}{2}=u} \delta(u) e^{-j\omega\left(u+\frac{\tau}{2}\right)} du = \\ &= A e^{j\omega\frac{\tau}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) e^{-j\omega v} dv - A e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) e^{-j\omega u} du \stackrel{(1.85)}{=} A \left( e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.100)$$

Conform relațiilor lui Euler

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (1.101)$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

expresia (1.100) devine:

$$F\{x'_v(t)\} = 2jA \sin \omega \frac{\tau}{2} \quad (1.102)$$

Aplicând proprietatea (1.70) de derivare în timp a transformatei Fourier, rezultă că:

$$F\{x'_v(t)\} = X_v(j\omega) = \frac{F\{x'_v(t)\}}{j\omega} = \frac{2jA \sin \omega \frac{\tau}{2}}{j\omega} = \frac{2A \sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega} = \tau A \sin c \frac{\omega \tau}{2}$$

Această expresie este identică cu cea obținută în urma aplicării directe a formulei transformatei Fourier asupra impulsului video simetric.

**A2. Analiza spectrală a impulsului video nesimetric**

1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;

$$x_{v_n}(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \tau] \\ 0 & t \notin [0, \tau] \end{cases}$$

2) Reprezentarea în timp a semnalului este prezentată în figura 1.31.

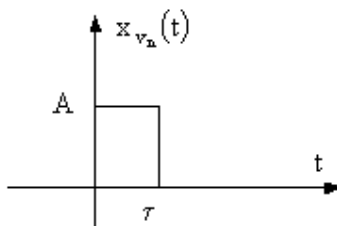


Fig.1.31 Impuls video nesimetric

3) Analiza simetriei semnalului;

Semnalul nu este nici par nici impar

4) Calculul funcției de densitate spectrală a semnalului  $X(j\omega)$

**Metoda I**

Se aplică transformata Fourier

$$X_{v_n}(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

unde:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt ; B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt;$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt = \int_0^{\tau} A \cos \omega t dt = \frac{A}{\omega} \sin \omega \tau$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt = \int_0^{\tau} A \sin \omega t dt = -\frac{A}{\omega} (\cos \omega \tau - 1)$$

iar modulul densității spectrale:

$$|X_{v1}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \left| \tau A \sin c \frac{\omega \tau}{2} \right| \quad (1.103)$$

**Metoda II**

Se utilizează proprietatea transformatei Fourier de întârziere în timp,

$$F\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \text{ unde } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Această metodă se aplică acolo unde se pot utiliza rezultate obținute în urma unor calcule anterioare.

În acest caz se utilizează rezultatele obținute la analiza spectrală a semnalului video simetric.

Se observă că  $x_{v_n}(t) = x_v\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$  și deci:

$$X_{v_n}(j\omega) = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} X_v(j\omega) = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} A \tau \sin c \frac{\omega \tau}{2}$$

$$\text{și cum } e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} = \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) - j \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\text{Rezultă că: } |X_{v_n}(j\omega)| = \left| \tau A \sin c \frac{\omega \tau}{2} \right| = |X_v(j\omega)| \quad (1.104)$$

Observații:

➤ Modulul densității spectrale de amplitudine este identic pentru cele două semnale video. În concluzie, oricare două semnale care diferă doar prin întârziere în timp, au modulele densităților spectrale de amplitudine egale.

➤ Banda de frecvență pentru cele două semnale este aceeași.

➤ Reprezentarea grafică a modului densității spectrale de amplitudine a semnalului video nesimetric este identică cu cea din figura 1.28.

➤ În cazul în care se cere realizarea analizei spectrale a unui impuls nesimetric, se caută (dacă este posibil) a se simetriza acest semnal. În acest caz calculele matematice se simplifică (deoarece se studiază un semnal fie par fie impar), fără a se modifica rezultatele finale.

### A3. Determinarea funcției spectrale a unui impuls cu discontinuități

Impulsul este reprezentat în figura 1.32a).

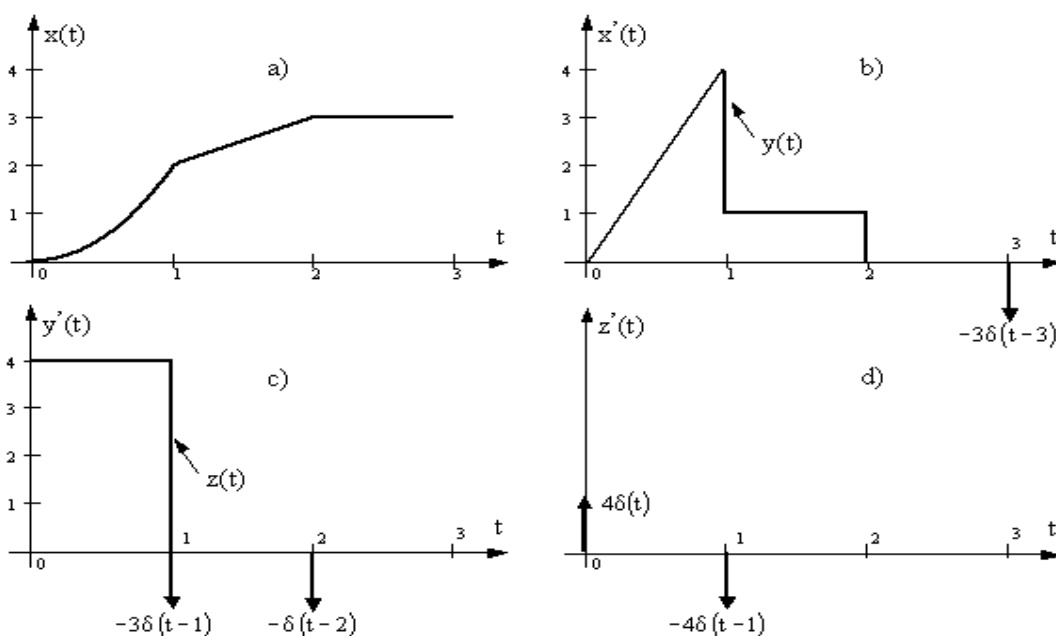


Fig.1.32 Exemplificarea metodei de derivare succesivă ce pune în evidență impulsurile Dirac, utilizată la calculul funcției de densitate spectrală

Expresia semnalului este următoarea

$$x(t) = \begin{cases} 2t^2 & t \in (0,1) \\ t+1 & t \in (1,2) \\ 3 & t \in (2,3) \end{cases}$$

#### Metoda I

Se aplică transformata Fourier

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 2t^2 e^{-j\omega t} dt + \int_1^2 (t+1)e^{-j\omega t} dt + \int_2^3 3e^{-j\omega t} dt$$

Calculând pe rând cele trei integrale, se obține:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 2t^2 e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^1 t^2 \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt = -\frac{2}{j\omega} \left[ \left( t^2 e^{-j\omega t} \Big|_0^1 \right) - 2 \int_0^1 t e^{-j\omega t} dt \right] = \\ &= -\frac{2}{j\omega} \left[ e^{-j\omega} - 2 \int_0^1 t \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt \right] = -\frac{2}{j\omega} e^{-j\omega} - \frac{4}{(j\omega)^2} \left[ \left( t e^{-j\omega t} \Big|_0^1 \right) - \int_0^1 e^{-j\omega t} dt \right] = \\ &= -\frac{2}{j\omega} e^{-j\omega} - \frac{4}{(j\omega)^2} e^{-j\omega} + \frac{4}{(j\omega)^2} \int_0^1 t \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt = -\frac{2}{j\omega} e^{-j\omega} - \frac{4}{(j\omega)^2} e^{-j\omega} - \\ &- \frac{4}{(j\omega)^3} \left( e^{-j\omega t} \Big|_0^1 \right) = -\frac{2}{j\omega} e^{-j\omega} - \frac{4}{(j\omega)^2} e^{-j\omega} - \frac{4}{(j\omega)^3} (e^{-j\omega} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_1^2 t e^{-j\omega t} dt = \int_1^2 t \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt = -\frac{1}{j\omega} \left[ \left( t e^{-j\omega t} \Big|_1^2 \right) - \int_1^2 e^{-j\omega t} dt \right] = \\ &= -\frac{1}{j\omega} (2e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}) + \frac{1}{j\omega} \int_1^2 \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt = -\frac{1}{j\omega} (2e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}) - \frac{1}{(j\omega)^2} \left( e^{-j\omega t} \Big|_1^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{j\omega} (2e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}) - \frac{1}{(j\omega)^2} (e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

$$I_{22} = \int_1^2 e^{-j\omega t} dt = \int_1^2 \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt = -\frac{1}{j\omega} \left( e^{-j\omega t} \Big|_1^2 \right) = -\frac{1}{j\omega} (e^{-2j\omega} - e^{-j\omega})$$

$$I_3 = 3 \int_2^3 e^{-j\omega t} dt = 3 \int_2^3 \frac{(e^{-j\omega t})'}{(-j\omega)} dt = -\frac{3}{j\omega} \left( e^{-j\omega t} \Big|_2^3 \right) = -\frac{3}{j\omega} (e^{-3j\omega} - e^{-2j\omega})$$

În final se obține:

$$X(j\omega) = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{(j\omega)^3} (1 - e^{-j\omega}) - \frac{1}{(j\omega)^2} (3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) - \frac{3}{j\omega} e^{-3j\omega} \quad (1.105)$$

## Metoda II

Se procedează la o derivare succesivă, punând în evidență, treptat, impulsurile Dirac, corespunzătoare derivării discontinuităților.

În figura 1.32a),b),c) este reprezentat procedeul de evidențiere a impulsurilor Dirac rezultate în urma derivării impulsului video simetric.

Se obține:

$$x'(t) = y(t) - 3\delta(t-3) \text{ unde } y(t) = \begin{cases} 4t & t \in (0,1) \\ 1 & t \in (1,2) \end{cases}$$

$$y'(t) = z(t) - 3\delta(t-1) - \delta(t-2) \text{ unde } z(t) = 4, \quad t \in (0,1)$$

$$z'(t) = 4\delta(t) - 4\delta(t-1)$$

Se parcurge drumul în sens invers, astfel:

- se aplică transformata Fourier derivatei de ordinul I funcției  $z(t)$

$$\begin{aligned} F\{z'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(t) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(t-1) e^{-j\omega t} dt = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt - 4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) e^{-j\omega(u+1)} du = \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt - 4 e^{-j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) e^{-j\omega u} du \stackrel{(1.85)}{=} 4(1 - e^{-j\omega}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

Aplicând proprietatea (1.70) de derivare în timp a transformatei Fourier, rezultă că:

$$F\{z(t)\} = \frac{F\{z'(t)\}}{j\omega} = \frac{4}{j\omega} (1 - e^{-j\omega}) \quad (1.107)$$

- se aplică transformata Fourier derivatei de ordinul I funcției  $y(t)$

$$\begin{aligned} F\{y'(t)\} &= F\{z(t)\} - \int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(t-1)e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)e^{-j\omega t} dt \stackrel{\substack{t-1=u \\ t-2=v}}{=} \frac{4}{j\omega} (1 - e^{-j\omega}) - \\ &- 3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)e^{-j\omega(u+1)} du - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v)e^{-j\omega(v+2)} dv = \frac{4}{j\omega} (1 - e^{-j\omega}) - 3e^{-j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega u} du - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v)e^{-j\omega(v+2)} dv \stackrel{(1.85)}{=} \frac{4}{j\omega} (1 - e^{-j\omega}) - 3e^{-j\omega} - e^{-2j\omega} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Aplicând proprietatea (1.70) de derivare în timp a transformatei Fourier, rezultă că:

$$F\{y(t)\} = \frac{F\{y'(t)\}}{j\omega} = \frac{4}{(j\omega)^2} (1 - e^{-j\omega}) - \frac{1}{j\omega} (3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) \quad (1.109)$$

- se aplică transformata Fourier derivatei de ordinul I funcției  $x(t)$

$$\begin{aligned} F\{x'(t)\} &= F\{y(t)\} - \int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(t-3)e^{-j\omega t} dt \stackrel{t-3=u}{=} F\{y(t)\} - 3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)e^{-j\omega(u+3)} du = F\{y(t)\} - \\ &- 3e^{-3j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega u} du \stackrel{(1.85)}{=} \frac{4}{(j\omega)^2} (1 - e^{-j\omega}) - \frac{1}{j\omega} (3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) - 3e^{-3j\omega} \end{aligned} \quad (1.110)$$

Aplicând proprietatea (1.70) de derivare în timp a transformatei Fourier, rezultă că:

$$F\{x(t)\} = \frac{F\{x'(t)\}}{j\omega} = \frac{4}{(j\omega)^3} (1 - e^{-j\omega}) - \frac{1}{(j\omega)^2} (3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) - \frac{3}{j\omega} e^{-3j\omega}$$

Se observă că aplicarea acestei metode implică realizarea unor calcule matematice mult mai simple. Este vorba, la urma urmelor, de aplicarea proprietății care spune că transformata Fourier a impulsului Dirac este impulsul treaptă unitate.

## B. Analiza spectrală a impulsurilor ce nu sunt absolut integrabile

### B1. Analiza spectrală a impulsului constant

Impulsul constant este definit astfel:

$$x(t) = A$$

Conform (1.82) nu este un impuls absolut integrabil. În acest caz metoda propusă pentru obținerea densității spectrale este de a calcula transformata Fourier prin trecerea la limită a transformatei unui impuls care este absolut integrabil.

S-a ales ca impuls a cărui transformată se poate calcula, impulsul video simetric:

$$x_v(t) = \begin{cases} A & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \quad \text{sau} \quad |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \quad \text{sau} \quad |t| \geq \frac{\tau}{2} \end{cases};$$

Conform reprezentării grafice din figura 1.33, se observă că la limită,  $\tau \rightarrow \infty$ , impulsul video simetric se transformă în impuls constant.



Conform (1.94) transformata Fourier a impulsului video simetric are expresia:

$$X_v(j\omega) = \tau A \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2}$$

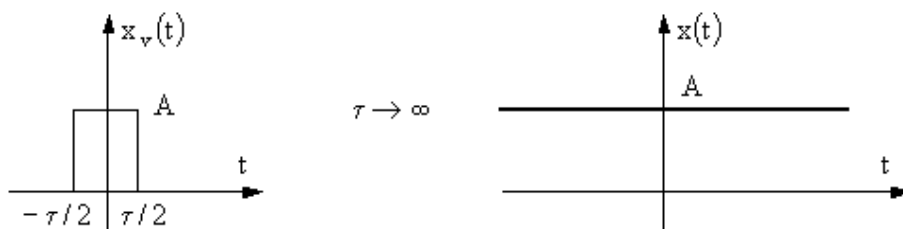


Fig.1.33 Obținerea impulsului constant din impulsul video simetric

În consecință:

$$F\{x(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \tau A \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \right] = 2\pi A \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc} \left( \frac{\tau}{2} \omega \right) \right]$$

Dacă se face notația  $k = \frac{\tau}{2}$  se obține:

$$F\{x(t)\} = 2\pi A \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}(k\omega) \right]$$

S-a arătat (în cadrul analizei spectrale a impulsului Dirac) că la limită funcția de eșantionare,  $f_e(\omega) = \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}(k\omega)$ , devine impuls Dirac. În consecință,

$$F\{x(t)\} = 2\pi A \delta(\omega) \tag{1.111}$$

Reprezentarea grafică a spectrului funcției continue este prezentată în figura 1.34.

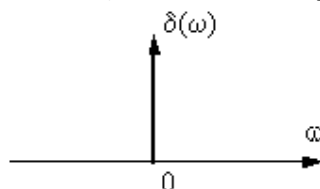


Fig.1.34 Spectrul funcției continue

### B2. Analiza spectrală a impulsului cosinusoidal

Semnalul cosinusoidal este definit astfel:

$$x_c(t) = \cos \omega_0 t, \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{1.112}$$

Deoarece semnalul nu este absolut integrabil, se construiește un semnal pentru care se poate aplica transformata Fourier. Acest semnal, absolut integrabil, este de tipul:

$$\begin{cases} x_{C1}(t) = \cos \omega_0 t, & t \in (-\tau, \tau) \\ 0 & t \notin (-\tau, \tau) \end{cases} \tag{1.113}$$

Pentru “segmentul” de semnal cosinusoidal transformata Fourier are expresia:

$$F\{x_{C1}(t)\} = \int_{-\tau}^{\tau} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{j(\omega-\omega_0)\tau} - e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}}{(\omega-\omega_0)} + \frac{e^{j(\omega+\omega_0)\tau} - e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}}{(\omega+\omega_0)} \right] \stackrel{(1.101)}{=} \frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)} + \\
&+ \frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{(\omega+\omega_0)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{j(\omega-\omega_0)\tau} - e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}}{(\omega-\omega_0)} + \frac{e^{j(\omega+\omega_0)\tau} - e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}}{(\omega+\omega_0)} \right] \stackrel{(1.101)}{=} \\
&\stackrel{(1.101)}{=} \frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)} + \frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{(\omega+\omega_0)} = \tau \operatorname{sinc}[(\omega-\omega_0)\tau] + \tau \operatorname{sinc}[(\omega+\omega_0)\tau]
\end{aligned}$$

În consecință:

$$\begin{aligned}
F\{x_C(t)\} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\tau \operatorname{sinc}[(\omega-\omega_0)\tau] + \tau \operatorname{sinc}[(\omega+\omega_0)\tau]] = \\
&= \pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau}{\pi} \operatorname{sinc}[(\omega-\omega_0)\tau] + \frac{\tau}{\pi} \operatorname{sinc}[(\omega+\omega_0)\tau] \right]
\end{aligned}$$

Dacă se face notația  $k = \tau$  se obține:

$$F\{x_C(t)\} = \pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}[(\omega-\omega_0)k] + \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}[(\omega+\omega_0)k] \right]$$

S-a arătat (în cadrul analizei spectrale a impulsului Dirac) că la limită, funcțiile de eșantionare,

$$f_c(\omega-\omega_0) = \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}[(\omega-\omega_0)k] \text{ sau, } f_c(\omega+\omega_0) = \frac{k}{\pi} \operatorname{sinc}[(\omega+\omega_0)k]$$

devin impulsuri Dirac.

În consecință,

$$F\{x_C(t)\} = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0) \quad (1.114)$$

Reprezentarea grafică a spectrului impulsului cosinusoidal este prezentată în figura 1.35.

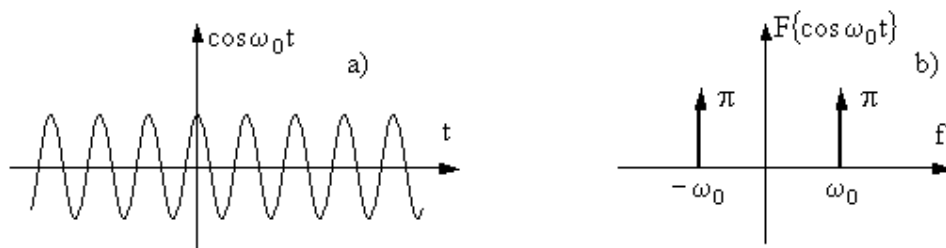


Fig.1.35 a) Semnalul cosinusoidal  $\cos \omega_0 t$ , b) Funcția de densitate spectrală a semnalului cosinusoidal  $\cos \omega_0 t$

### B3. Analiza spectrală a impulsului sinusoidal

Semnalul sinusoidal este definit astfel:

$$x_S(t) = \sin \omega_0 t, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (1.115)$$

Deoarece semnalul nu este absolut integrabil, se construiește un semnal pentru care se poate aplica transformata Fourier. Acest semnal, absolut integrabil, este de tipul:

$$\begin{cases} x_{S1}(t) = \sin \omega_0 t, & t \in (-\tau, \tau) \\ 0 & t \notin (-\tau, \tau) \end{cases} \quad (1.116)$$

Pentru “segmentul” de semnal sinusoidal transformata Fourier are expresia:

$$\begin{aligned}
F\{x_{C1}(t)\} &= \int_{-\tau}^{\tau} \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{(1.101)}{=} \frac{1}{2j} \int_{-\tau}^{\tau} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \\
&= j\tau \operatorname{sinc}[(\omega+\omega_0)\tau] - j\tau \operatorname{sinc}[(\omega-\omega_0)\tau]
\end{aligned}$$

În consecință:

$$F\{x_S(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [j\tau \operatorname{sinc}((\omega + \omega_0)\tau) - j\tau \operatorname{sinc}((\omega - \omega_0)\tau)] =$$

$$= j\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau}{\pi} \operatorname{sinc}((\omega + \omega_0)\tau) - \frac{\tau}{\pi} \operatorname{sinc}((\omega - \omega_0)\tau) \right]$$

Dacă se face notația  $k = \tau$ , analog cu studiul impulsului cosinusoidal, se obține:

$$F\{x_S(t)\} = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.117)$$

Reprezentarea grafică a spectrului impulsului sinusoidal este prezentată în figura 1.36.

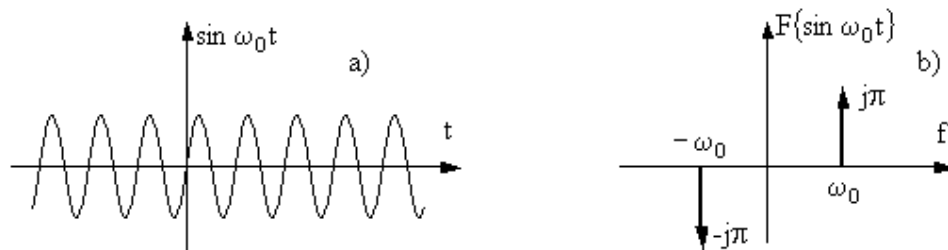


Fig.1.36 a) Semnalul sinusoidal  $\sin \omega_0 t$ , b) Funcția de densitate spectrală a semnalului sinusoidal  $\sin \omega_0 t$

## 1.7. Convoluția semnalelor analogice

Se numește funcție de convoluție (produs de convoluție în timp) a semnalelor  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  integrala:

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (1.118)$$

Notăția consacrată a produsului de convoluție în timp este următoarea:

$$x(t) \stackrel{\text{not}}{=} x_1(t) \otimes x_2(t) \quad (1.119)$$

Observație:

- Produsul de convoluție este util în analiza circuitelor și a sistemelor liniare; Convoluția unui semnal cu distribuțiile  $\delta(t)$  sau  $\sigma(t)$  conduce la rezultate utile analizei numerice a semnalelor.

Produsul de convoluție se poate interpreta printr-o ilustrare grafică. În figura 1.37 sunt prezentate spre exemplificare funcțiile:  $x_1(t) = \sigma(t)$  și  $x_2(t) = 1 - e^{-at}$ ,  $a > 0$ , al căror produs de convoluție  $x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$  este construit pe etape.

Aria hașurată reprezintă produsul de convoluție, care, așa cum rezultă din (1.118) este o funcție de  $t$ .

Din reprezentarea grafică rezultă că pentru a efectua  $x_1(t) \otimes x_2(t)$  se realizează simetricul celei de a doua funcții față de ordonată,  $x_2(-\tau)$ , se deplasează pe axa  $\tau$  cu  $t$  secunde, rezultând  $x_2(t - \tau)$ , ca apoi să se înmulțească cu  $x_1(t)$ .

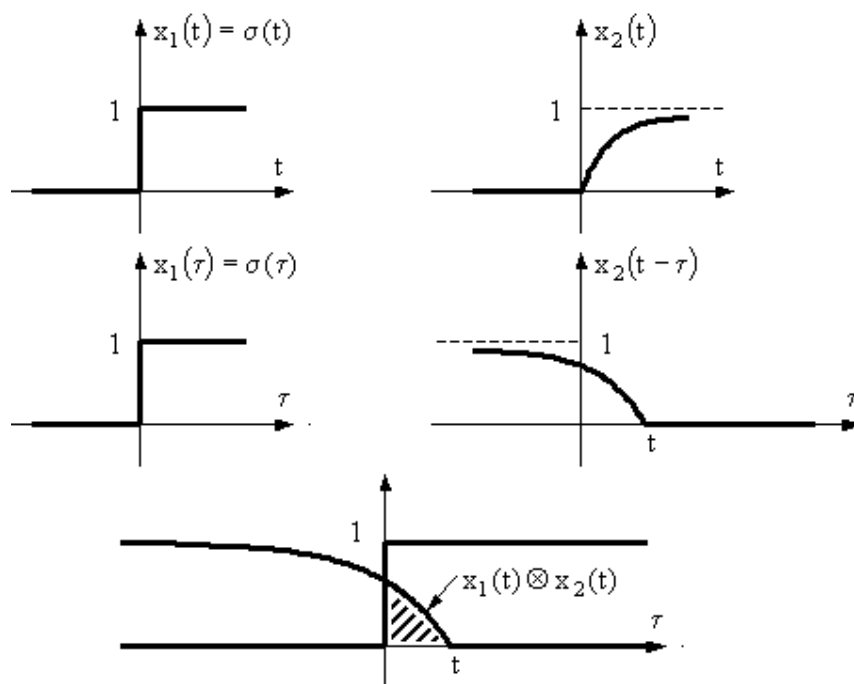


Fig.1.37 Ilustrarea grafică a produsului de convoluție

**Teorema integralei de convoluție în timp.** Transformata Fourier a produsului de convoluție este produsul algebric al transformatelor Fourier ale semnalelor din produs.

$$X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \quad (1.120)$$

$$\text{unde } X_1(\omega) = F\{x_1(t)\}; X_2(\omega) = F\{x_2(t)\}$$

$$\text{și } x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$$

Demonstrație:

$$\text{Fie: } X_1(\omega) = F\{x_1(t)\}; X_2(\omega) = F\{x_2(t)\}; X(\omega) = F\{x(t)\}$$

Aplicând transformata Fourier semnalului  $x(t)$ , definit conform (1.118) rezultă că:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{(1.118)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \quad (1.121)$$

Inversând ordinea de integrare se obține:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \stackrel{(t-\tau)=\theta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-j\omega(\tau+\theta)} d(\tau+\theta) \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \right] d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{X_1(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta}_{X_2(\omega)} \end{aligned}$$

de unde rezultă că :

$$X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Proprietățile convoluției în timp a semnalelor.

a) Produsul de convoluție este comutativ.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau \quad (1.122)$$

b) În interiorul produsului de convoluție se poate aplica integrarea, respectiv derivarea

$$x(t) = x_1'(t) \otimes \left[ \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right] = \left[ \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \right] \otimes x_2'(t) \quad (1.123)$$

Proprietatea (1.123) se demonstrează ușor ținând cont că:

$$X(\omega) = [j\omega X_1(\omega)] \cdot \left[ \frac{X_2(\omega)}{j\omega} \right]$$

În mod analog produsului de convoluție în timp se definește produsul de convoluție în frecvență astfel:

$$X(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda \quad (1.124)$$

Notăția consacrată a produsului de convoluție în frecvență este următoarea:

$$X(\omega) \stackrel{\text{not}}{=} X_1(\omega) \otimes X_2(\omega) \quad (1.125)$$

**Teorema integralei de convoluție în frecvență.** Transformata Fourier inversă a produsului de convoluție în frecvență este produsul algebric al semnalelor, ponderate cu o constantă.

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)\} = 2\pi x_1(t) x_2(t) \quad (1.126)$$

Proprietățile de comutativitate, integrare și de derivare sunt valabile și în cazul convoluției în frecvență.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega - \lambda) X_2(\lambda) d\lambda \quad (1.127)$$

$$X(\omega) = X_1'(\omega) \otimes \left[ \int_{-\infty}^{\omega} X_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[ \int_{-\infty}^{\omega} X_1(\lambda) d\lambda \right] \otimes X_2'(\omega) \quad (1.128)$$

În continuare se prezintă două exemple ale convoluției unui semnal  $x(t)$  cu funcția Dirac  $\delta(t)$ , respectiv funcția treaptă unitate  $\sigma(t)$ .

#### A. Convoluția cu funcția $\delta(t)$ .

Conform proprietăților funcției  $\delta(t)$  (paragraful 1.6.1. A) rezultă că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (1.129)$$

Relația (1.129) se poate scrie simbolic astfel:

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t) \quad (1.130)$$

Conform teoremei integralei de convoluție în timp, rezultă că:

$$F\{x(t) \otimes \delta(t)\} = X(\omega) \cdot 1 \quad (1.131)$$

Concluzie:

➤ Produsul de convoluție între un semnal și funcția Dirac conduce la același semnal.

Această concluzie poate fi interpretată grafic. De asemenea această reprezentare grafică oferă posibilitatea de a demonstra relația (1.129).

Fie semnalul  $x(t)$  prezentat în figura 1.38. Aria suprafeței de sub curba  $x(t)$  poate fi aproximată printr-o sumă de impulsuri de suprafață  $x(k\Delta t) \cdot \Delta t$ . Spre exemplu, impulsul nehașurat din figura 1.38, poate fi caracterizat de relația  $x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t$ , fiind localizat pe axa timpului la momentul  $t = k\Delta t$ .

Semnalul  $x(t)$  prezentat în figura 1.38 poate fi aproximat prin relația:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^n x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t \quad (1.132)$$

Aproximarea (1.132) este cu atât mai exactă cu cât intervalul de timp  $\Delta t$  al eșantionului este mai mic. La limită,  $\Delta t \rightarrow d\tau$ ,  $k\Delta t \rightarrow \tau$ , relația (1.132) se transformă în integrală. Pentru un semnal  $x(t)$  a cărei durată este infinită, conform (1.132) și a observațiilor anterioare rezultă că  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$ , adică relația (1.129).

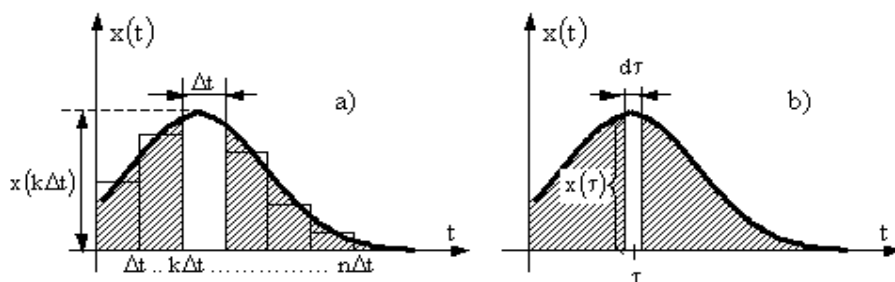


Fig. 1.38 Descompunerea unui semnal în eșantioane de lățime: a)  $\Delta t$  b)  $d\tau$

Convoluția unui semnal  $x(t)$  cu funcția Dirac oferă unele facilități în cadrul analizei semnalelor, cum ar fi:

- Descompunerea semnalelor în funcții de tip impuls-unitate

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \tag{1.133}$$

➤ Reprezentarea semnalelor prin eșantioane de tipul (1.133), proporționale cu impulsul Dirac permite determinarea (conform 1.131) a transformatei  $X(\omega)$  a semnalului, ceea ce constituie o metodă de analiză numerică a semnalelor.

➤ Scrierea semnalelor sub forma de eșantioane este utilizată la analiza sistemelor liniare. Cunoscând răspunsul sistemului la un eșantion de forma (1.133), se obține prin superpoziție răspunsul la toate eșantioanele, adică la semnalul  $x(t)$  scris conform (1.132) sau (1.129).

➤ Convoluția cu impulsul Dirac poate fi utilizată la calculul unor transformate Fourier.

B. Convoluția cu funcția  $\sigma(t)$

Conform (1.129) produsul de convoluție al unui semnal  $x(t)$  cu funcția Dirac are expresia:  $x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$ . Conform (1.123) în interiorul produsului de convoluție se poate aplica integrarea, respectiv derivarea, obținându-se relația

$$x(t) = x'(t) \otimes \left[ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \right] \tag{1.134}$$

Aplicând asupra (1.134) observația (1.62),  $\delta(t) = \frac{d(\sigma(t))}{dt} = \sigma'(t)$ , derivata funcției treaptă unitate este funcția Dirac, rezultă că:

$$x(t) = x'(t) \otimes \sigma(\tau) \tag{1.135}$$

sau

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x'(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau \tag{1.136}$$

Concluzie:

➤ Produsul de convoluție între derivata unui semnal și funcția treaptă unitate conduce la același semnal.

Această concluzie poate fi interpretată grafic. De asemenea această reprezentare grafică oferă posibilitatea de a demonstra relația (1.136).

Fie semnalul  $x(t)$  prezentat în figura 1.39. ce poate fi aproximat printr-o sumă de trepte plasate pe axa timpului la momentele  $t = k\Delta t$ . Aceste semnale treaptă au amplitudinea egală cu  $\Delta x(k\Delta t)$ . Această amplitudine este astfel aleasă încât să fie aproximativ egală cu produsul dintre derivata semnalului (panta funcției  $x(t)$ ) la momentul  $t = k\Delta t$  și durată  $\Delta t$ .

$$\Delta x(k\Delta t) \approx x'(k\Delta t)\Delta t \tag{1.137}$$

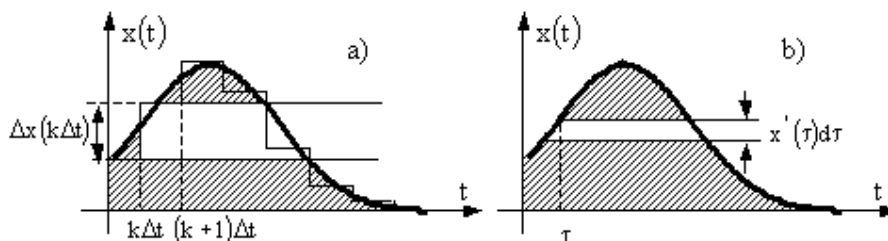


Fig.1.39 Descompunerea unui semnal în semnale treaptă de amplitudine: a)  $\Delta x(k\Delta t)$  b)  $x'(\tau)\Delta t$

Semnalul  $x(t)$  prezentat în figura 1.39 poate fi aproximat prin relația:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^n x'(k\Delta t) \sigma(t - k\Delta t) \Delta t \quad (1.138)$$

Aproximarea (1.138) este cu atât mai exactă cu cât intervalul de timp  $\Delta t$  este mai mic. La limită,  $\Delta t \rightarrow d\tau$ ,  $k\Delta t \rightarrow \tau$ , relația (1.138) se transformă în integrală. Pentru un semnal  $x(t)$  conform (1.138) și a observațiilor anterioare rezultă că

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x'(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau,$$

adică relația (1.136).

Convoluția unui semnal  $x(t)$  cu funcția treaptă unitate oferă facilități în cazul analizei semnalelor sau a sistemelor liniare.



## 2. MODULAȚIA

### 2.1 Necesitatea modulației semnalelor. Definiții și clasificări.

Telecomunicațiile se ocupă cu transmiterea diverselor semnale dintr-un punct în altul. Pentru transmiterea semnalelor se utilizează **canale de telecomunicații cu fir** (prin cablu) sau **canale de telecomunicații fără fir** (emisiunile radio, TV, comunicațiile prin satelit, telefonie fără fir ...).

➤ În cazul canalelor de telecomunicații cu fir, semnalele ce urmează a fi transmise ocupă o bandă de frecvență mult mai mică decât cea pe care o poate asigura canalul de telecomunicații. Canalele de telecomunicații sunt foarte costisitoare, transmiterea unui singur mesaj (semnal) pe o astfel de linie de comunicație este total neeconomică și mult sub capacitatea canalului de telecomunicații de a transmite informații. De aceea se urmărește utilizarea cât mai intensivă a canalelor de telecomunicații, mai ales a celor de mare distanță.

Prin utilizarea cât mai intensivă a unui canal de telecomunicație se înțelege transmiterea **simultană** a cât mai multor semnale pe același circuit fizic. Acest lucru nu se poate realiza prin transmiterea directă a semnalelor, fără o prelucrare prealabilă, deoarece s-ar produce o interferență între semnale, astfel încât, la recepție ar fi imposibil de regăsit semnalele individuale.

Această interferență se poate explica prin faptul că în urma analizei spectrale a semnalelor s-a observat că banda acestora începe de la zero Hz (semnale de joasă frecvență).

Transmiterea simultană a mai multor semnale pe un același circuit fizic este posibilă prin utilizarea tehnicilor de multiplexare în timp sau frecvență a semnalelor.

Multiplexarea în frecvență a semnalelor se bazează pe deplasarea spectrelor de frecvență ale diverselor semnale, astfel încât acestea să ocupe benzi de frecvență diferite, fără a se suprapune.

Deplasarea spectrelor semnalelor se realizează prin modulație.

➤ În cazul canalelor de telecomunicații fără fir (a sistemelor de radiocomunicații) modulația permite utilizarea eficientă a sistemului de propagare a undelor electromagnetice.

Cu ajutorul teoriei propagării undelor electromagnetice se poate arăta că un semnal poate fi emis cu un randament bun numai dacă antena are o lungime de cel puțin o zecime din lungimea de undă corespunzătoare frecvenței minime din spectrul acestui semnal.

$$l_{\min} = \frac{\lambda}{10} = \frac{1}{10} \frac{c}{f_{\min}} \quad (2.1)$$

Cum spectrul generat de un microfon în fața căruia se vorbește are frecvența maximă în jurul a 10kHz, rezultă că pentru a emite unde electromagnetice corespunzătoare frecvențelor vocii umane, ar fi necesare antene de ordinul kilometrilor, lucru ce nu ar fi practic.

În practică toate semnalele emise în eter sunt modulate, deplasând astfel spectrul în domeniul frecvențelor înalte.

Concluzie

Prin modulație se facilitează:

- 1) Transmiterea pe același canal a mai multor semnale.
- 2) Utilizarea eficientă a sistemelor de transmitere a undelor electromagnetice.

În procesul de modulație intervin următoarele semnale:

- Semnalul modulator  $x_0(t)$  – cel ce conține informația (mesajul);
- Semnalul purtător  $x_p(t)$  – asupra căruia se transferă informația;
- Semnalul modulator  $x_M(t)$  – semnalul rezultat prin acțiunea semnalului modulator asupra semnalului purtător, semnal ce se transmite;

### Definiție

**Modulația constă în modificarea unui parametru al semnalului purtător de către semnalul modulator ce urmează a fi transmis, având ca rezultat deplasarea spectrului de frecvență al acestuia din urmă în domeniul frecvențelor înalte.**

După natura semnalului purtător poate exista:

- Modulație cu purtător sinusoidal;
- Modulație cu purtător în impulsuri;

## 2.2. Modulație cu purtător sinusoidal. Tipuri de modulație.

Semnalul purtător are expresia:

$$x_p(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \Phi_p) \quad (2.2)$$

**Cum a modula înseamnă a stabili o dependență între un parametru al purtătorului  $x_p(t)$  și semnalul modulator  $x_0(t)$ , este indicat ca această dependență să fie liniară, deoarece prin transformarea inversă, numită demodulație, să se poată obține simplu semnalul util  $x_0(t)$  din cel modulat.**

Cum semnalul modulator poate modifica unul din cei trei parametri electrici ce definesc semnalul purtător se obțin trei tipuri de modulație:

- Modulația în amplitudine (M.A.)
- Modulația în frecvență (M.F.)
- Modulația în fază (M.  $\Phi$  sau M.P.)

### 2.2.1. Analiza spectrală a semnalelor modulate în amplitudine (M.A.)

În acest caz amplitudinea semnalului purtător nu mai este constantă, ea suferind o dependență liniară cu semnalul modulator.

Fie  $A(t)$  amplitudinea instantanee a semnalului purtător

$$A(t) = A_p + k x_0(t) \quad (2.3)$$

unde  $-k$  este constanta modulatorului de amplitudine.

Din (2.2) și (2.3) se obține expresia în timp a semnalului modulat în amplitudine:

$$x_{MA}(t) = A(t) \cos(\Omega_p t + \Phi_p) = [A_p + k x_0(t)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p) \quad (2.4)$$

Aceasta reprezintă forma generală a unui semnal modulat în amplitudine deoarece asupra semnalului nu s-a introdus nici o restricție.

În figura 2.1 sunt reprezentate formele de undă ale:

- semnalului modulator  $x_0(t)$  - figura 2.1a);
- amplitudinii instantanee  $A(t) = A_p + x_0(t)$  - figura 2.1a);
- semnalului purtător  $x_p(t)$  - figura 2.1b);
- semnalul modulat în amplitudine  $x_{MA}(t)$  - figura 2.1c).

Aceste reprezentări grafice s-au realizat în cazul în care constanta modulatorului de amplitudine,  $k$ , este unitară  $k = 1$ .

Curba reprezentată punctat pe graficul variației în timp a semnalului modulat în amplitudine poartă numele de înfășurătoare sau anvelopă a semnalului M.A., ea reproducând forma semnalului modulator.

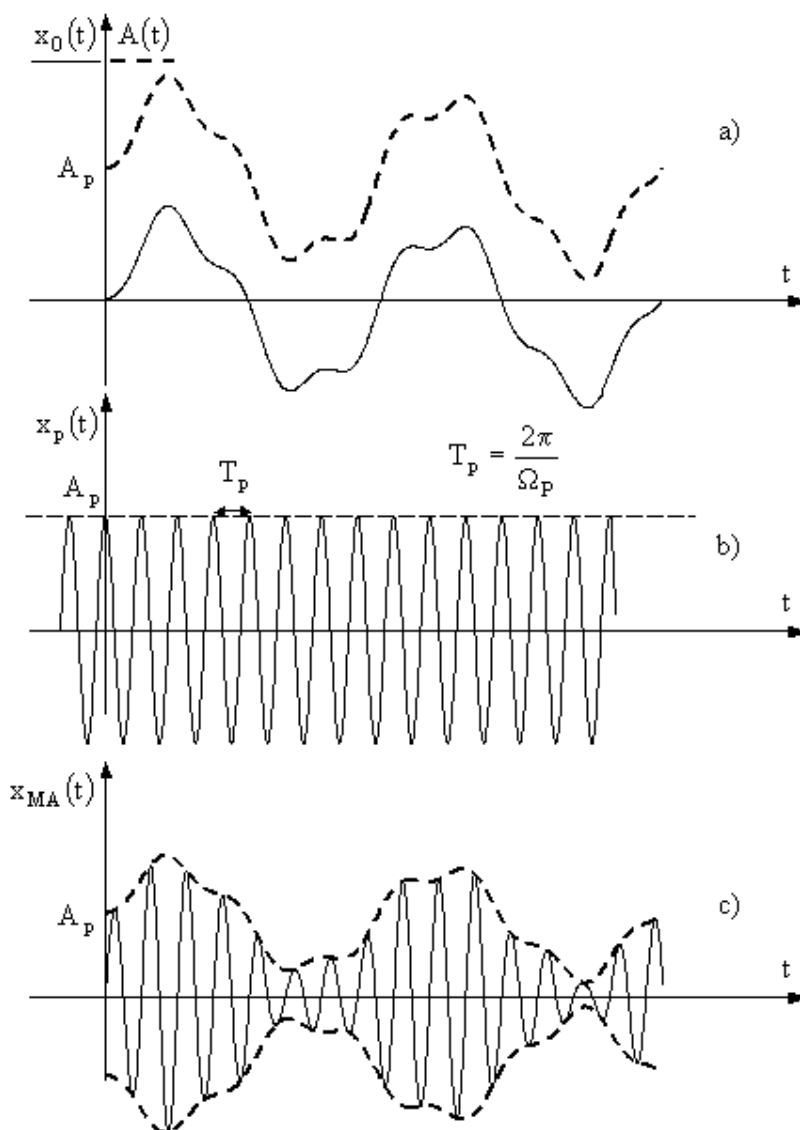


Fig.2.1 Forme de undă ale:

- a) Semnalului modulator și amplitudinii instantanee, b) Semnalului purtător, c) Semnalul modulat în amplitudine.

Pentru examinarea comportării semnalului modulat în amplitudine în domeniul frecvență se studiază trei cazuri particulare ale semnalului modulator.

**A. Semnalul modulator este un semnal sinusoidal**

Semnalul modulator este de forma:

$$x_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.5}$$

Din (2.4) și (2.5) rezultă că:

$$x_{MA}(t) = [A_p + k x_0(t)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p) = [A_p + k a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$$

În ipoteza în care  $k = 1$ , rezultă:

$$x_{MA}(t) = A_p \left[ 1 + \frac{a_0}{A_p} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \right] \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$$

Notând

$$m = \frac{a_0}{A_p} < 1 \quad (2.6)$$

care poartă numele de **indice (grad) de modulație**, expresia semnalului modulat în amplitudine devine:

$$x_{MA}(t) = A_p [1 + m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p) \quad (2.7)$$

sau

$$x_{MA}(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \Phi_p) + \frac{mA_p}{2} \cos[(\Omega_p + \omega_0)t + (\Phi_p + \varphi_0)] + \frac{mA_p}{2} \cos[(\Omega_p - \omega_0)t + (\Phi_p - \varphi_0)] \quad (2.8)$$

În cazul în care se consideră fazele inițiale ale semnalelor modulator și purtător ca fiind nule, expresiile matematice ale semnalelor devin:

- Semnalul modulator:  $x_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t)$
- Semnalul purtător:  $x_p(t) = A_p \cos(\Omega_p t)$
- Semnalul modulat în amplitudine:  $x_{MA}(t) = A_p [1 + m \cos(\omega_0 t)] \cos(\Omega_p t)$

Reprezentările grafice ale celor trei semnale sunt prezentate în figura 2.2.

Observație:

- Semnalul purtător trebuie să îndeplinească următoarele condiții de amplitudine, respectiv frecvență:

$$\Omega_p \gg \omega_0 \quad A_p \gg a_0 \quad (2.9)$$

- Amplitudinea semnalului modulat în amplitudine variază după o lege (în acest caz sinusoidală) dată de semnalul modulator. Curba reprezentată punctat pe graficul variației în timp a semnalului modulat în amplitudine, poartă numele de înfășurătoare, sau anvelopă a semnalului M.A., ea reproducând forma semnalului modulator.

- Din relația (2.7) se pot calcula valorile maxime și minime ale amplitudinii semnalului M.A.

$$A_M = A_p (1 + m) \quad (2.10)$$

$$A_m = A_p (1 - m)$$

- Valoarea indicelui de modulație se poate calcula astfel:

$$m = \frac{A_M - A_p}{A_p} = \frac{A_p - A_m}{A_p} = \frac{A_M - A_m}{A_M + A_m} \quad (2.11)$$

Din expresia (2.8) se constată că spectrul semnalului M.A. conține trei componente spectrale

- Componenta centrală de frecvență  $\Omega_p$  și amplitudine  $A_p$ ;
- Două componente de frecvențe  $(\Omega_p + \omega_0)$  și  $(\Omega_p - \omega_0)$  de amplitudine  $\frac{mA_p}{2}$  care se numesc componente laterale (inferioară și superioară);

Reprezentările grafice ale spectrelor celor trei semnale sunt prezentate în figura 2.3.

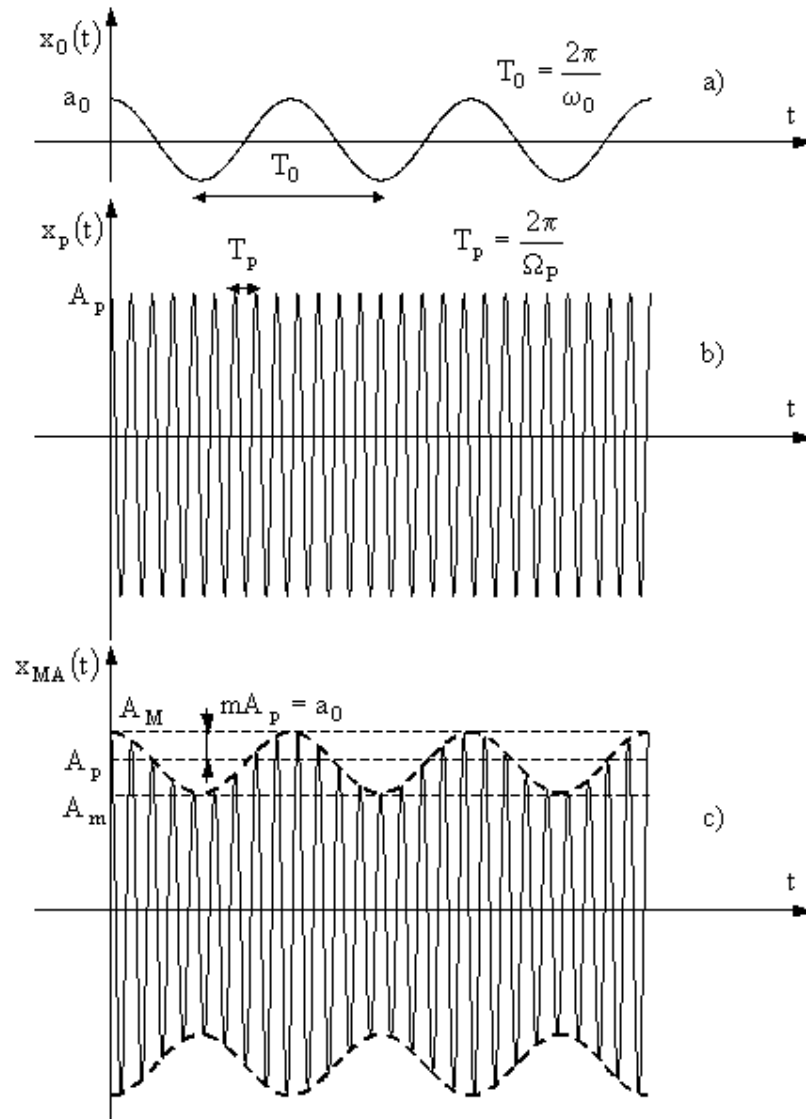


Fig.2.2 Modulație în amplitudine cu modulator sinusoidal: a) Semnalul modulator; b) Semnalului purtător; c) Semnalul modulat în amplitudine.

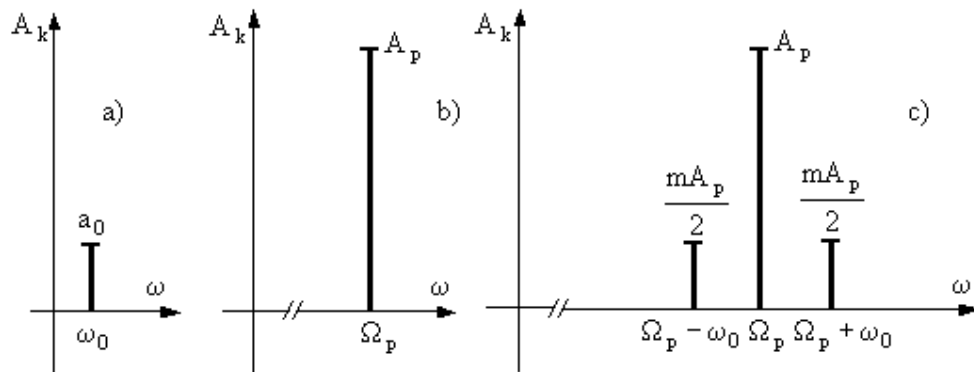


Fig. 2.3 Diagramele spectrale de amplitudiniale: a) Semnalul modulator, b) Semnalului purtător; c) Semnalul modulat în amplitudine.

Spectrul semnalului M.A. este reprezentat doar pentru domeniul frecvențelor fizice ( $\omega > 0$ )

Important!:

Banda de frecvențe ocupată de semnalul M.A.este:

$$B_{MA} = 2\omega_0 \quad (2.12)$$

Observație:

➤ În cazul în care  $m > 1$ , indicele de modulație fiind supraunitar înfășurătoarea semnalului nu mai reproduce forma semnalului modulator  $x_0(t)$ , acesta nemaiputând fi obținut prin demodulare.

Reprezentarea grafică a unui semnal supramodulat ( $m > 1$ ) este prezentată în figura 2.4.

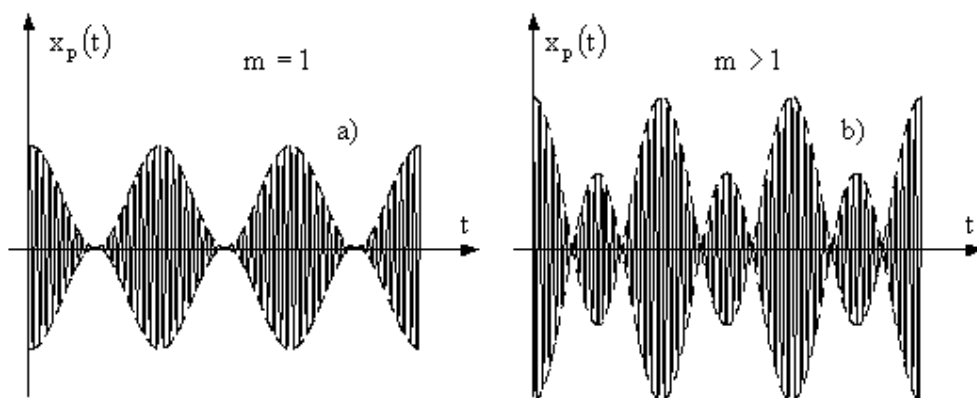


Fig. 2.4 Formele de undă a semnalului modulat în amplitudine: a)  $m=1$ ; b) supramodulat ( $m > 1$ )

### B. Semnalul modulator este o sumă de semnale sinusoidale

Semnalul modulator este de forma:

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2.13)$$

Din (2.4) și (2.13) se obține expresia semnalului MA:

$$x_{MA}(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \Phi_p) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k A_p}{2} \cos[(\Omega_p + \omega_k)t + (\Phi_p + \varphi_k)] + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k A_p}{2} \cos[(\Omega_p - \omega_k)t + (\Phi_p - \varphi_k)] \quad (2.14)$$

Reprezentările grafice ale spectrelor semnalelor modulator și modulat în amplitudine sunt prezentate în figura 2.5.

Observație:

➤ În relația (2.14) se îndeplinesc condițiile:

$$(\Omega_p - \omega_n) > \omega_n \text{ sau } \Omega_p > 2\omega_n \quad (2.15)$$

➤ Se constată că semnalul M.A. conține două benzi laterale (inferioară și superioară) în locul celor două componente laterale ca în cazul precedent.

Important!

Banda de frecvențe ocupată de semnalul M.A.este:

$$B_{MA} = 2\omega_n \quad (2.16)$$

fiind dublă față de banda mesajului (a semnalului modulator)  $B_0 = \omega_n$

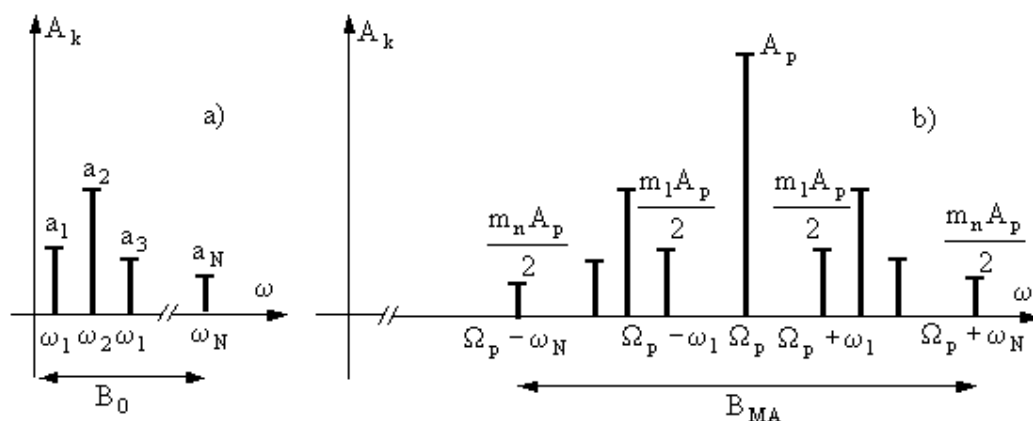


Fig. 2.5 Diagramele spectrale de amplitudiniale pentru cazul în care semnalul modulator este o sumă de semnale sinusoidale: a) Semnalul modulator, b) Semnalul modulat în amplitudine.

### C. Semnalul modulator este o funcție de timp arbitrară, neperiodică

Cazurile analizate anterior, semnalul modulator este un semnal sinusoidal sau o sumă de semnale sinusoidale, sunt idealizări folosite pentru simplificarea și înțelegerea modului în care are loc modulația în amplitudine a semnalelor.

Situația reală este aceea în care semnalul modulator este un semnal neperiodic. Pentru a calcula densitatea spectrală de amplitudine a semnalului M.A. este necesar ca semnalul modulator  $x_0(t)$  să admită transformată Fourier, adică să se poată calcula  $F\{x_0(t)\} = X_0(j\omega)$ .

Conform (2.4), densitatea spectrală de amplitudine a semnalului M.A. devine:

$$\begin{aligned}
 F\{x_{MA}(t)\} &= X_{MA}(j\omega) = F\{[A_p + k x_0(t)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p)\} = \\
 (1.101) \quad &= F\left\{ [A_p + k x_0(t)] \frac{e^{j(\Omega_p t + \Phi_p)} - e^{-j(\Omega_p t + \Phi_p)}}{2} \right\} = \frac{A_p}{2} e^{j\Phi_p} F\{e^{j\Omega_p t}\} + \frac{A_p}{2} e^{-j\Phi_p} F\{e^{j\Omega_p t}\} + \\
 &+ \frac{k}{2} e^{j\Phi_p} F\{e^{j\Omega_p t} x_0(t)\} + \frac{k}{2} e^{-j\Phi_p} F\{e^{-j\Omega_p t} x_0(t)\} \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Utilizând proprietatea (1.69) de deplasarea spectrului (modularea) a transformatei Fourier,

$$F^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\} = e^{j\omega_0 t} x(t)$$

sau

$$F\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} = X(\omega - \omega_0),$$

rezultă că:

$$F\{e^{j\Omega_p t} x_0(t)\} = X_0(\omega - \Omega_p), \quad F\{e^{-j\Omega_p t} x_0(t)\} = X_0(\omega + \Omega_p) \quad (2.18)$$

Utilizând (1.111) rezultat în urma analizei spectrale a impulsului constant, de amplitudine  $A = 1$ , precum și proprietatea (1.69) rezultă că:

$$F\{e^{j\Omega_p t} 1(t)\} = 2\pi\delta(\omega - \Omega_p), \quad F\{e^{-j\Omega_p t} 1(t)\} = 2\pi\delta(\omega + \Omega_p) \quad (2.19)$$

Din (2.17), (2.18) și (2.19) se obține expresia densității spectrale a semnalului M.A. funcție de densitatea spectrală de amplitudine a semnalului modulator și a frecvenței (pulsăției) semnalului purtător:

$$\begin{aligned}
 F\{x_{MA}(t)\} &= X_{MA}(j\omega) = \pi A_p [e^{j\Phi_p} \delta(\omega - \Omega_p) + e^{-j\Phi_p} \delta(\omega + \Omega_p)] + \\
 &+ \frac{k}{2} [e^{j\Phi_p} X_0(\omega - \Omega_p) + e^{-j\Phi_p} X_0(\omega + \Omega_p)] \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

În cazul în care  $\Phi_p = 0$  densitatea spectrală a semnalului M.A. devine:

$$X_{MA}(j\omega) = \pi A_p [\delta(\omega - \Omega_p) + \delta(\omega + \Omega_p)] + \frac{k}{2} [X_0(\omega - \Omega_p) + X_0(\omega + \Omega_p)] \quad (2.21)$$

Reprezentările grafice ale spectrelor semnalelor modulator și modulat în amplitudine sunt prezentate în figura 2.6.

Observație:

➤ Pentru ambele reprezentări spectrale numai frecvențele (pulsățiile) pozitive,  $\omega > 0$ , au semnificație fizică (în figura 2.6 reprezentările grafice hașurate);

➤ Spectrul semnalului modulator figura 2.6.a) este limitat la valoarea  $\omega_M$ , fiind un spectru de joasă frecvență;

➤ Din expresia (2.8) se constată că spectrul semnalului M.A.  $X_{MA}(j\omega)$  conține trei componente spectrale:

- un impuls localizat la frecvența  $\Omega_p$ , de amplitudine  $\pi A_p$ ;
- bandă laterală inferioară -BLI- plasată în intervalul  $(\Omega_p - \omega_M, \Omega_p)$ , de amplitudine maximă  $k/2$ ;
- bandă laterală superioară -BLS- plasată în intervalul  $(\Omega_p, \Omega_p + \omega_M)$ , de amplitudine maximă  $k/2$ ;

➤ Banda de frecvențe ocupată de semnalul modulator este:

$$B_0 = \omega_M \quad (2.22)$$

➤ Banda de frecvențe ocupată de semnalul M.A. este:

$$B_{MA} = 2\omega_M \quad (2.23)$$

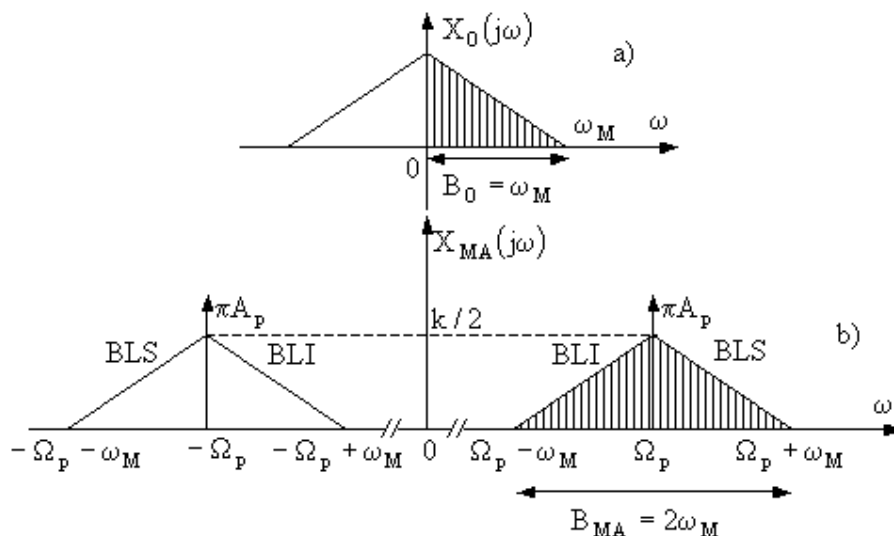


Fig. 2.6 Diagramele spectrale de amplitudini pentru cazul în care semnalul modulator este definit de o funcție de timp arbitrară, neperiodică: a) Semnalul modulator; b) Semnalul modulat în amplitudine.

În urma analizei spectrale a semnalului M.A. este evidentă posibilitatea utilizării modulației de amplitudine pentru transmiterea simultană a mai multor semnale pe același canal de telecomunicații, fenomen ce se poate realiza prin utilizarea tehnicii de multiplexare în frecvență.

Multiplexarea în frecvență a semnalelor se bazează pe deplasarea spectrelor de frecvență ale diverselor semnale, astfel încât acestea să ocupe benzi de frecvență diferite, fără a se suprapune.



În figura 2.7 se ilustrează posibilitatea transmiterii simultane a n convorbiri telefonice de pe n căi de comunicație pe o aceeași linie fizică, utilizând multiplexarea în frecvență.

➤ Se consideră că lățimea necesară benzii de frecvențe pentru fiecare din convorbirile telefonice este aceeași  $B_0 = \omega_M \approx (300 - 4000) \text{ Hz}$ ;

➤ Spectrul de frecvențe corespunzător fiecărei convorbiri este translatat în jurul frecvenței purtătoare  $\Omega_{p_i}$ ;  $i = \overline{1, n}$ ;

➤ Banda de frecvență corespunzătoare fiecărui semnal astfel modulat în amplitudine este în conformitate cu (2.23),

$$B_{MA_i} = 2B_0 = [\Omega_{p_i} + \omega_M] - [\Omega_{p_i} - \omega_M]; i = \overline{1, n};$$

➤ Pentru a nu apărea suprapuneri între spectrele semnalelor astfel translate (modulate în amplitudine) trebuie impusă condiția:

$$\Omega_{p_i} + \omega_M < \Omega_{p_{(i+1)}} - \omega_M; \Omega_{p_{(i+1)}} - \Omega_{p_i} > 2\omega_M = 2B_0; i = \overline{1, (n-1)} \quad (2.24)$$

➤ Considerând relația (2.24) la limită,  $\Omega_{p_{(i+1)}} - \Omega_{p_i} = 2B_0$ , banda de frecvență alocată pe o linie de transmisie celor n convorbiri telefonice simultane are expresia:

$$B_{linie} = 2nB_0 \quad (2.25)$$

➤ Funcție de lărgimea de bandă proprie fiecărui tip de linie de transmisie (cablu bifilar, cablu coaxial, fibră optică...) se poate calcula numărul maxim de convorbiri telefonice (transmisii de date) ce pot avea loc simultan:

➤ La recepție se face inițial separarea celor n semnale individuale cu ajutorul unor filtre trece-bandă și apoi retranslatarea lor pentru ca spectrele lor să revină la pozițiile lor originare  $B = (300 - 4000) \text{ Hz}$ .

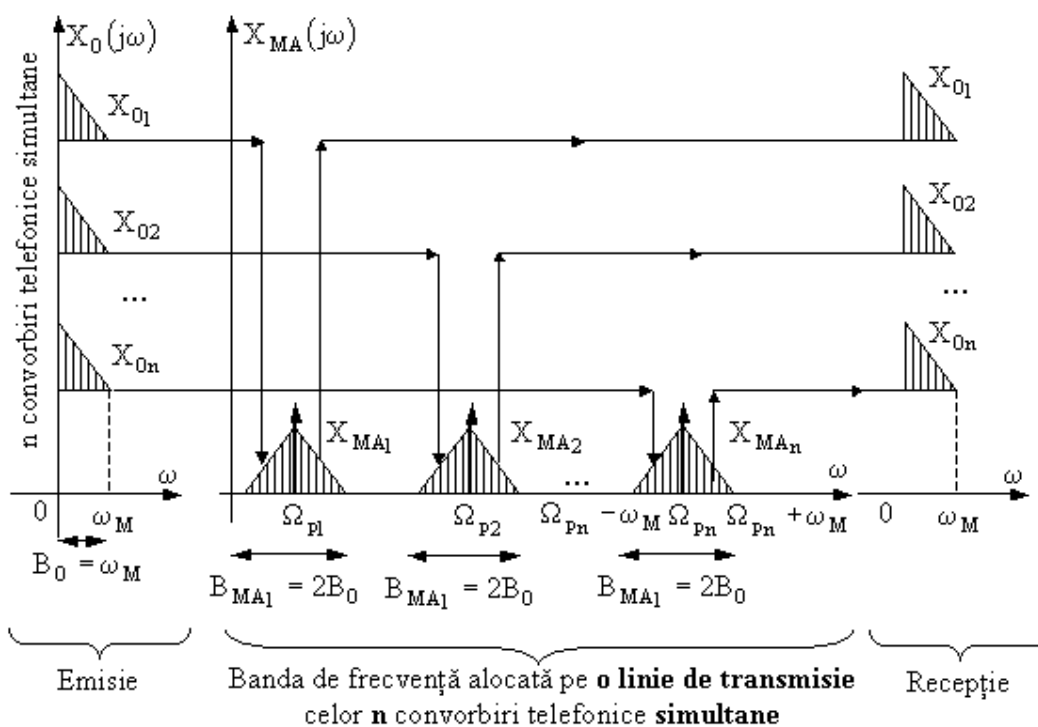


Fig. 2.7 Principiul multiplexării în frecvență

În practică transmiterea semnalelor M.A. se poate face prin mai multe metode, rezultând astfel mai multe tipuri de sisteme de modulație în amplitudine:

a) Cu purtător și ambele benzi laterale **2BL+P** sau mai simplu **MA**;

Aceste sistem a fost exemplificat anterior, expresia (generală) în timp a semnalului M.A. fiind  $x_{MA}(t) = [A_p + k x_0(t)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$ , densitatea spectrală a semnalului M.A. fiind dată de (2.20), iar diagrama spectrală fiind prezentată în figura 2.6.

b) Cu purtător suprimat **2BL** sau **MA-PS**;

Această modulație de amplitudine cu purtătorul suprimat (modulație de produs) translatează funcția spectrală a semnalului modulator  $x_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  ce urmează a fi transmis prin înmulțire cu un semnal sinusoidal de frecvență egală cu frecvența cu care se translatează spectrul.

Expresia în domeniul timp a semnalului modulat în amplitudine cu purtătoarea suprimată este:

$$x_{MA-PS}(t) = x_0(t) \cos(\Omega_p t) \quad (2.26)$$

Densitatea spectrală de amplitudine a semnalului MA-PS devine:

$$F\{x_{MA-PS}(t)\} = X_{MA-PS}(j\omega) = F\{x_0(t) \cos(\Omega_p t)\} \stackrel{(1.101)}{=} F\left\{x_0(t) \frac{e^{j\Omega_p t} - e^{-j\Omega_p t}}{2}\right\}$$

Utilizând proprietatea (1.69) de deplasarea spectrului (modularea) a transformatei Fourier, rezultă că:

$$X_{MA-PS}(j\omega) = \frac{1}{2} [X_0(j\omega - \Omega_p) + X_0(j\omega + \Omega_p)] \quad (2.27)$$

Reprezentările grafice ale spectrelor semnalelor modulator și modulat în amplitudine cu purtătorul suprimat sunt prezentate în figura 2.8.

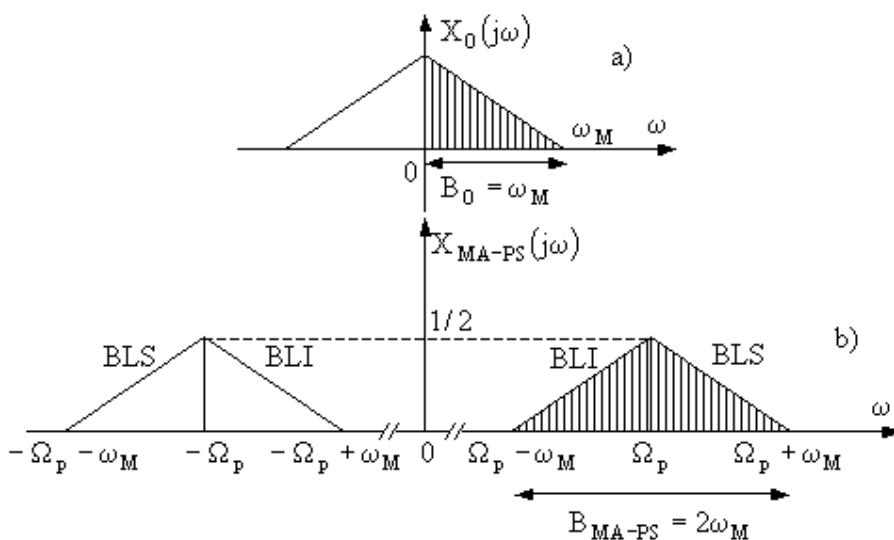


Fig. 2.8 Diagramele spectrale de amplitudiniale în cazul modulației în amplitudine cu purtătorul suprimat: a) Semnalul modulator; b) Semnalul MA-PS.

Observație:

➤ Pentru ambele reprezentări spectrale numai frecvențele (pulsatiile) pozitive,  $\omega > 0$ , au semnificație fizică (în figura 2.8 reprezentările grafice hașurate);

➤ Spectrul semnalului modulator figura 2.8.a) este limitat la valoarea  $\omega_M$ , fiind un spectru de joasă frecvență;

➤ Din expresia (2.27) se constată că spectrul semnalului MA-PS,  $X_{MA-PS}(j\omega)$  conține două componente spectrale:

- bandă laterală inferioară -BLI- plasată în intervalul  $(\Omega_p - \omega_M, \Omega_p)$ ;
- bandă laterală superioară -BLS- plasată în intervalul  $(\Omega_p, \Omega_p + \omega_M)$ ;

➤ Banda de frecvențe ocupată de semnalul MA-PS este:

$$B_{MA-PS} = B_{MA} = 2\omega_M \tag{2.28}$$

În concluzie se poate afirma că spectrul semnalului MA-PS este același cu spectrul semnalului MA, cu excepția celor două impulsuri localizate la frecvențele  $\pm\Omega_p$  care lipsesc. Se obțin numai cele două benzi laterale, purtătorul fiind suprimat.

c) Cu bandă laterală unică **MA-BLU**;

Analizând spectrul semnalului MA-PS că banda laterală superioară (BLS) sau banda laterală inferioară (BLI) conțin informația completă privind spectrul semnalului modulator  $X_0(j\omega)$ . S-a luat în considerație doar spectrul situat la frecvențe pozitive (care au semnificație fizică).

În concluzie în loc să se transmită spectrul complet (MA-PS) – figura 2.8. b) – este suficient să se transmită fie numai BLS – figura 2.8. c), sau numai BLI – figura 2.8. d).

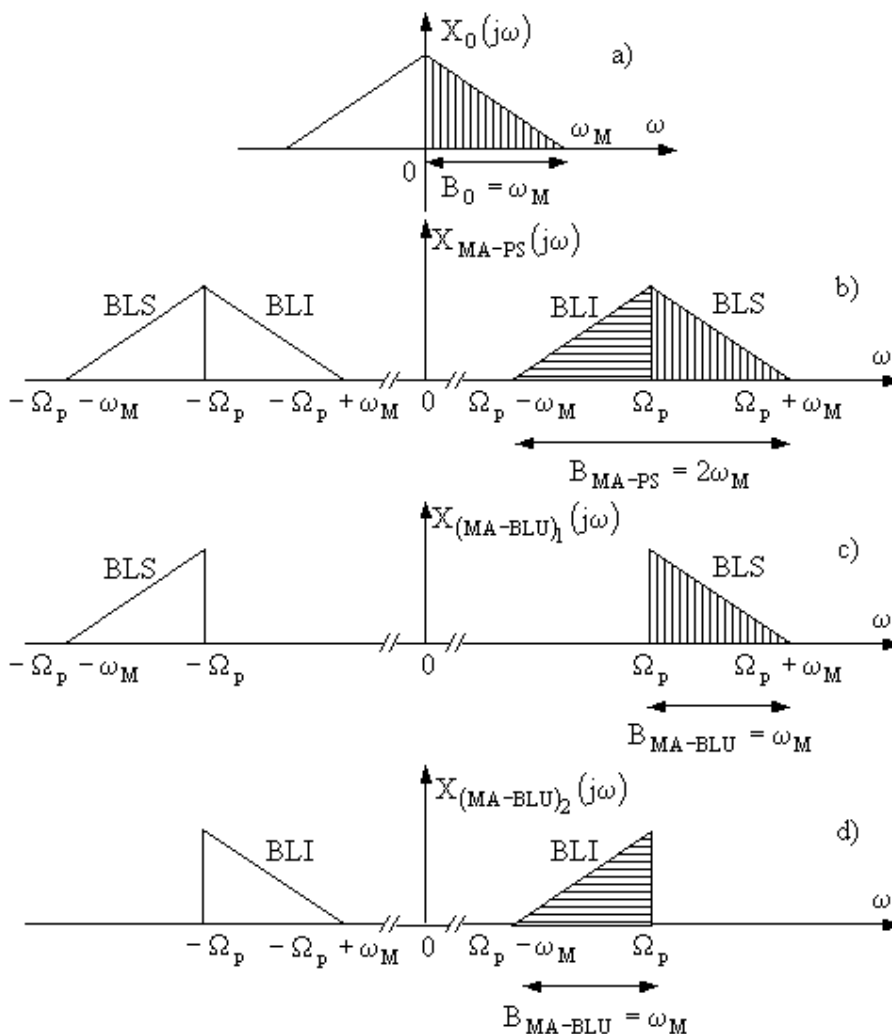


Fig. 2.9 Obținerea spectrului semnalului MA-BLU din semnalul MA-PS: a) Semnalul modulator; b) Semnalul MA-PS; c) Semnalul MA-BLU (cu BLS); d) Semnalul MA-BLU (cu BLI);

Observație:

- Pentru ambele reprezentări spectrale numai frecvențele (pulsățiile) pozitive,  $\omega > 0$ , au semnificație fizică (în figura 2.9 reprezentările grafice hașurate);
- Spectrul semnalului modulator figura 2.9.a) este limitat la valoarea  $\omega_M$ , fiind un spectru de joasă frecvență;
- Din expresia (2.27) se constată că spectrul semnalului MA-BLU,  $X_{MA-BLU}(j\omega)$  conține o singură componentă spectrală:
  - $B_{LI} \in (\Omega_p - \omega_M, \Omega_p)$  sau  $B_{LS} \in (\Omega_p, \Omega_p + \omega_M)$ ;
- Banda de frecvențe ocupată de semnalul MA-BLU este:
 
$$B_{MA-BLU} = B_0 = \omega_M \quad (2.29)$$

### 2.2.2. Generarea semnalelor modulate în amplitudine (M.A.)

Din analiza semnalului MA în domeniul frecvență a rezultat că procesul de modulație translatează spectrul de frecvență al semnalului modulator. Răspunsul circuitului care realizează modulația, răspuns care este tocmai semnalul MA, conține frecvențe (ale purtătorului) care sunt diferite de cele prezente în semnalul de intrare (semnalul modulator).

Prin urmare modulația nu se poate realiza utilizând circuite liniare invariabile în timp, deoarece răspunsul acestora nu poate conține componente având alte frecvențe decât cele prezente în semnalul de intrare.

În consecință, circuitele ce realizează MA trebuie să conțină elemente neliniare, sau să fie circuite liniare variabile în timp.

În continuare se va prezenta procedeul de generare a celor trei tipuri de semnale modulate, MA, MA-PS și MA-BLU, utilizând circuite liniare variabile în timp.

#### A. Generarea semnalului MA-PS

Schema de principiu a unui modulator utilizat pentru generarea unui semnal MA-PS, cu comutator este prezentată în figura 2.10.

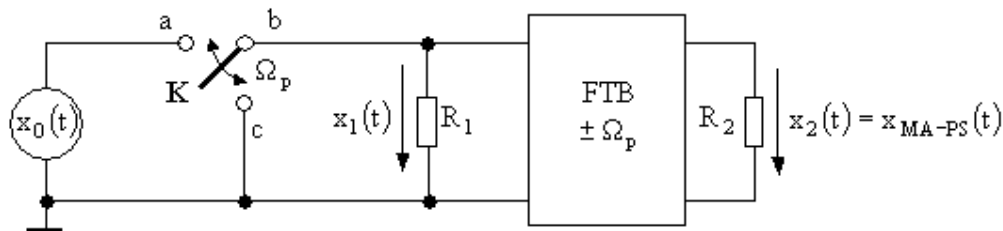


Fig. 2.10 Schema de principiu a unui generator MA-PS de tip comutator

Semnalul modulator  $x_0(t)$  este un semnal neperiodic a cărui formă de undă este prezentată în figura 2.11a). Acest semnal admite transformată Fourier, spectrul său (prezentat în figura 2.11 b) fiind limitat la valoarea  $\omega_M$ .

Comutatorul  $K$  se închide la terminalele  $a$  sau  $c$  cu frecvența  $\Omega_p$ , conectând pentru o semiperioadă terminalul  $b$  la semnalul  $x_0(t)$ , iar în celaltă semiperioadă, prin  $c$  la masă.

Operațiunea de comutare poate fi considerată o multiplicare a semnalului modulator  $x_0(t)$  cu un semnal periodic dreptunghiular  $x_p(t)$  ce joacă rolul de semnal purtător. Forma de undă, respectiv spectrul acestui semnal purtător sunt reprezentate în figura 2.11 c), respectiv d).

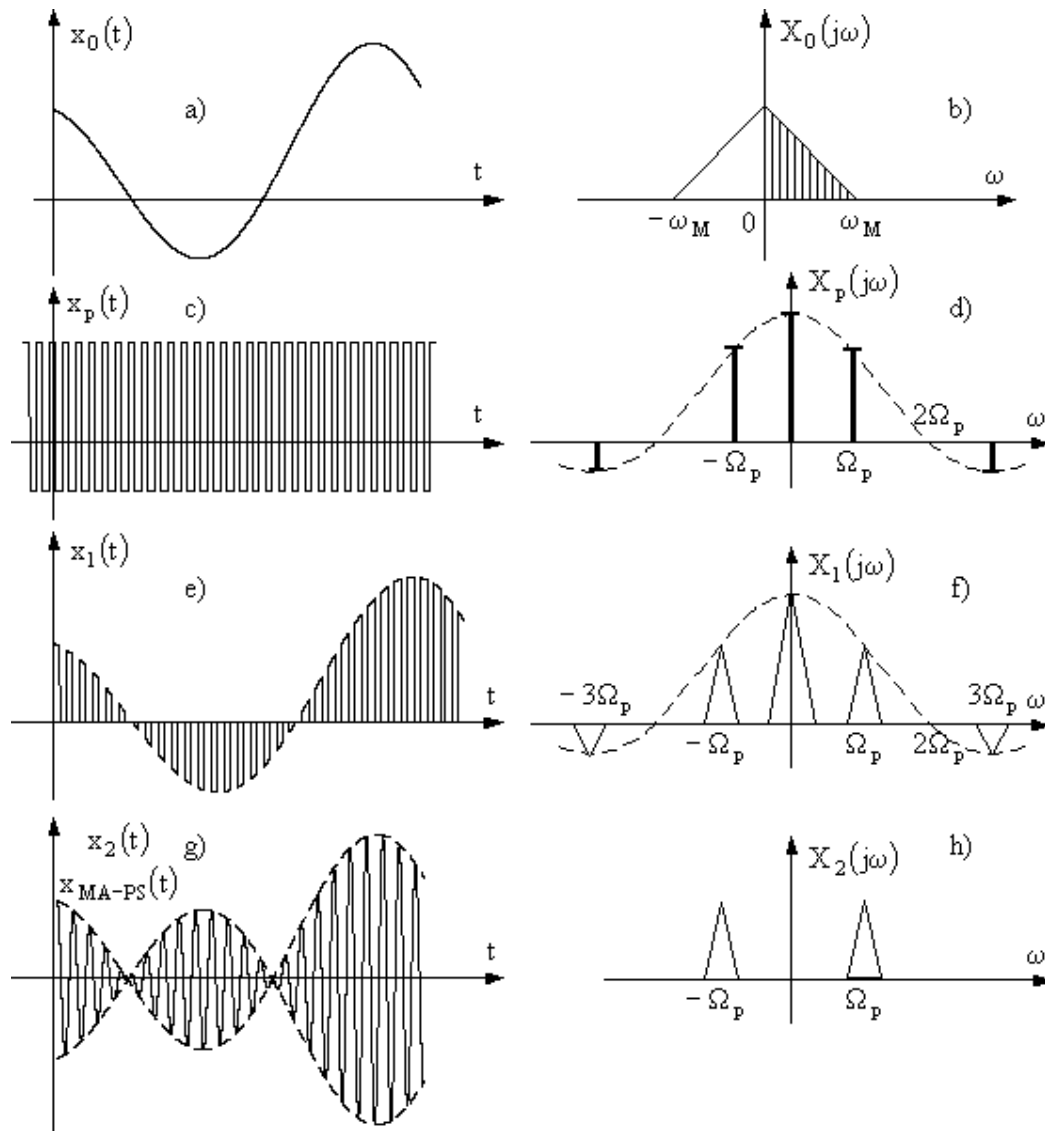


Fig. 2.11 Forme de undă și spectrele semnalelor ce intervin în cazul generării semnalului MA-PS

Semnalul  $x_1(t)$  obținut în urma operațiunii de comutare poate fi scris sub următoarea formă:

$$x_1(t) = x_0(t)x_p(t) \tag{2.30}$$

Considerând că semnalul purtător este un semnal periodic dreptunghiular cu factorul de umplere,  $q = 1/2$  ce se bucură de proprietatea de a fi par, scrierea acestuia sub forma S.F.A. desfășurată este conform paragrafului 1.5.3 următoarea:

$$x_p(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \cos \Omega_p t - \frac{1}{3} \cos 3\Omega_p t + \frac{1}{5} \cos 5\Omega_p t - \frac{1}{7} \cos 7\Omega_p t + \dots \right] \tag{2.31}$$

Din (2.30) și (2.31) rezultă că:

$$x_1(t) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos \Omega_p t - \frac{1}{3} \cos 3\Omega_p t + \frac{1}{5} \cos 5\Omega_p t - \frac{1}{7} \cos 7\Omega_p t + \dots \right) \right] x_0(t) \tag{2.32}$$

Utilizând proprietatea (1.69) de deplasarea spectrului (modularea), rezultă că:

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2} X_0(j\omega) + \frac{1}{\pi} \left\{ [X_0(\omega - \Omega_p) + X_0(\omega + \Omega_p)] - \frac{1}{3} [X_0(\omega - 3\Omega_p) + X_0(\omega + 3\Omega_p)] + \dots \right\}$$

În final se obține:

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2} X_0(j\omega) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{(-1)^{\frac{(n-1)}{2}}}{n} X_0(\omega - n\Omega_p) \quad (2.33)$$

unde  $n = 2k + 1, k \in Z$

Forma de undă a semnalului  $x_1(t)$  este prezentată în figura 2.11 e), iar spectrul în figura 2.11 f).

Termenul  $\frac{1}{\pi} [X_0(\omega - \Omega_p) + X_0(\omega + \Omega_p)]$  reprezintă spectrul semnalului MA-PS ce se urmărește a fi generat. Acest semnal poate fi extras din semnalul  $x_1(t)$  prin utilizarea unui filtru trece-bandă (FTB), ce permite să treacă doar componentele din jurul frecvenței  $\pm \Omega_p$ , blocându-le pe celelalte.

Ca FTB poate fi utilizat un circuit RLC având frecvența de rezonanță  $\omega_r = \Omega_p$ . Așadar, trecerea semnalului  $x_1(t) = x_0(t)x_p(t)$  printr-un FTB centrat pe frecvența  $\pm \Omega_p$ , are ca rezultat obținerea la ieșire a următorului semnal:

$$x_2(t) = x_{MA-PS}(t) = x_0(t) \cos \Omega_p t \quad (2.34)$$

Forma de undă a semnalului  $x_2(t) = x_{MA-PS}(t)$  este prezentată în figura 2.11 g), iar spectrul în figura 2.11 h).

## B. Generarea semnalului MA-BLU

Generarea semnalului MA-BLU se face prin filtrarea uneia din benzile laterale ale semnalului MA-PS. Filtrul de bandă care realizează suprimarea unei benzi laterale trebuie să aibă o caracteristică de filtrare foarte abruptă la frecvența  $\Omega_p$ , deoarece produsul de modulație ce trebuie suprimat este foarte aproape de semnalul util care trebuie transmis. Acest filtru este costisitor și dificil de realizat.

## C. Generarea semnalului MA

Schema de principiu a unui modulator utilizat pentru generarea unui semnal MA, cu comutator este prezentată în figura 2.12.

În cazul acestui tip de modulator operațiunea de comutare poate fi considerată o multiplicare a semnalului de intrare  $x_0(t) + A_p \cos \Omega_p t$  cu un semnal periodic dreptunghiular  $x_p(t)$  de frecvență  $\Omega_p$ .

Spectrul semnalului de intrare și al semnalului dreptunghiular sunt reprezentate în figura 2.13 a), respectiv b).

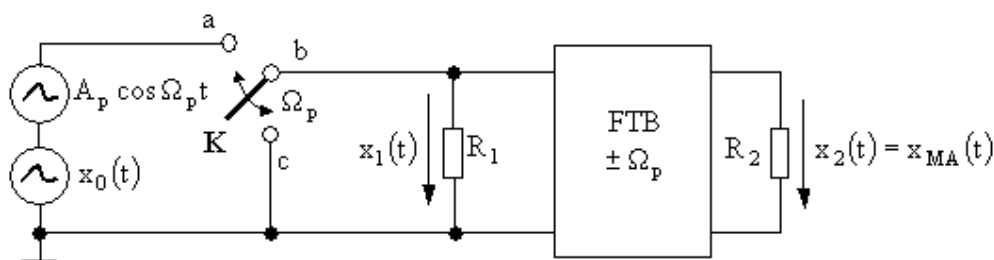


Fig. 2.12 Schema de principiu a unui generator MA de tip comutator

Semnalul  $x_1(t)$  obținut în urma operațiunii de comutare poate fi scris sub următoarea formă:

$$x_1(t) = [x_0(t) + A_p \cos \Omega_p t] x_p(t) \tag{2.35}$$

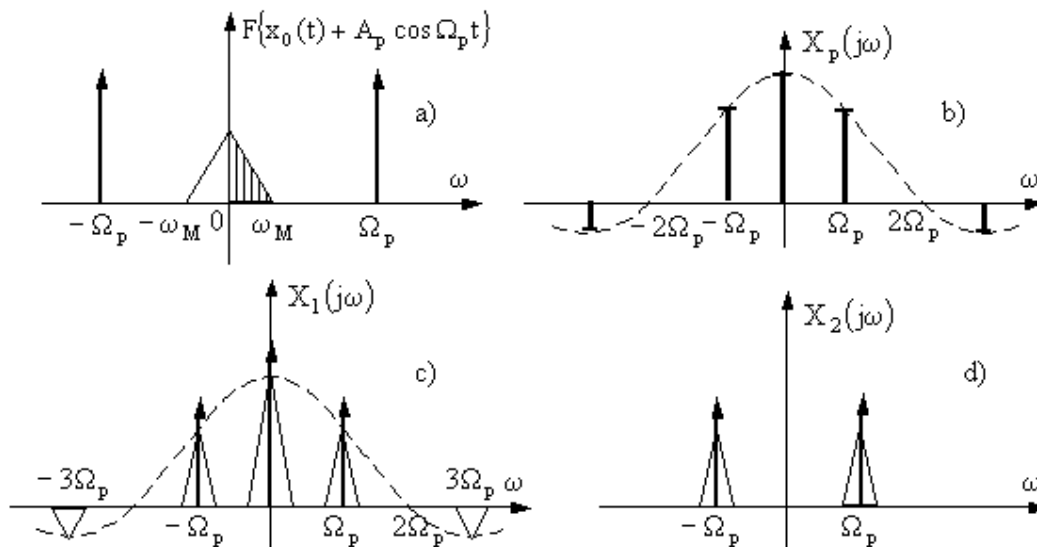


Fig. 2.13 Forme de undă și spectrele semnalelor ce intervin în cazul generării semnalului MA

Spectrul semnalului  $x_1(t)$  este prezentat în figura 2.13 c). Se observă că spectrul semnalului  $x_1(t)$  conține spectrul semnalului MA (centrat la  $\pm \Omega_p$ ), precum și spectrele adiționale nedorite centrate la frecvențele  $\omega = 0, \pm 3\Omega_p, \pm 5\Omega_p, \pm 7\Omega_p, \dots$

Termenul  $\frac{1}{\pi} [X_0(\omega - \Omega_p) + X_0(\omega + \Omega_p)] + A_p [\delta(\omega - \Omega_p) + \delta(\omega + \Omega_p)]$  ce reprezintă spectrul semnalului MA ce se urmărește a fi generat poate fi extras din semnalul  $x_1(t)$  prin utilizarea unui filtru trece-bandă (FTB), ce permite să treacă doar componentele din jurul frecvenței  $\pm \Omega_p$ , blocându-le pe celelalte.

Spectrul semnalului MA astfel generat este prezentat în figura 2.13 d).

### 2.2.3. Demodularea semnalelor modulate în amplitudine

Prin demodulare se înțelege procesul de extragere a semnalului modulator dintr-o oscilație modulată. Orice receptor radio, oricât de simplu ar fi, trebuie să conțină cel puțin etajul demodulator, precedat de antenă (care furnizează semnalul modulat) și urmat de un traductor electroacustic care transformă semnalul electric în semnal acustic.

În domeniul frecvență, prin demodulare trebuie să se realizeze retranslația spectrului în poziția inițială. Demodulația semnalelor M.A. se numește detecție.

În continuare se va prezenta procedeul de demodulare a celor trei tipuri de semnale modulate: MA, MA-PS și MA-BLU, utilizând circuite liniare variabile în timp.

#### B. Demodularea semnalului MA-PS

Demodularea are ca scop obținerea semnalului original (modulator)  $x_0(t)$  din semnalul modulat  $x_{MA-PS}(t) = x_0(t) \cos(\Omega_p t)$ .

Pentru a obține matematic retranslația spectrului în poziție originală se înmulțește semnalul modulat cu  $\cos(\Omega_p t)$ .

Semnalul astfel obținut are expresia:

$$x_R(t) = x_{MA-PS}(t) \cos(\Omega_p t) \quad (2.36)$$

Spectrul semnalului astfel obținut (reconstruit) are expresia:

$$\begin{aligned} X_R(j\omega) &= F\{x_{MA-PS}(t) \cos(\Omega_p t)\} \stackrel{(2.26)}{=} F\{x_0(t) \cos^2(\Omega_p t)\} = \\ &= \frac{1}{2} F\{x_0(t) (1 + \cos(2\Omega_p t))\} \stackrel{(1.101)}{=} = \frac{1}{2} \left[ X_0(j\omega) + F\left\{x_0(t) \frac{e^{2j\Omega_p t} + e^{-2j\Omega_p t}}{2}\right\} \right] \end{aligned}$$

În final se obține:

$$X_R(j\omega) = \frac{1}{2} X_0(j\omega) + \frac{1}{4} [X_0(\omega + 2\Omega_p) + X_0(\omega - 2\Omega_p)] \quad (2.37)$$

Relația (2.37) sugerează că semnalul modulator (de joasă frecvență) poate fi obținut din semnalul astfel reconstruit utilizând un filtru trece jos (FTJ) ce elimină spectrele de înaltă frecvență centrate pe  $\pm \Omega_p$ .

Expresia spectrul semnalului demodulat este următoarea:

$$X_D(j\omega) = \frac{1}{2} X_0(j\omega) \quad (2.38)$$

Întrucât atât la emisie cât și la recepție, translația spectrelor se obține prin înmulțirea semnalelor de intrare ( $x_0(t)$  la emisie,  $x_{MA-PS}(t)$  la recepție) cu  $\cos(\Omega_p t)$ , rezultă că la demodulare pot fi folosite aceleași circuite ca cele utilizate pentru procesul de modulație. Singura deosebire constă în înlocuirea FTB utilizat la modulator cu un FTJ la demodulator.

În cazul sistemelor MA-PS este necesar ca semnalul purtător generat la recepție să aibă aceeași frecvență ca cea a semnalului purtător utilizat la emisie. Orice abatere dă naștere la distorsiuni foarte mari.

Presupunând că frecvența purtătorului de la recepție (demodulare) este  $\Omega_p + \Delta\Omega_p$ , semnalul reconstruit are expresia:

$$x_R(t) = x_0(t) \cos(\Omega_p t) \cos(\Delta\Omega_p t) = \frac{1}{2} x_0(t) [\cos(\Delta\Omega_p t) + \cos(2\Omega_p + \Delta\Omega_p)t]$$

iar spectrul semnalului devine:

$$X_R(j\omega) = \frac{1}{2} F\{x_0(t) \cos(\Delta\Omega_p t)\} + \frac{1}{2} [X_0(\omega + 2\Omega_p + \Delta\Omega_p) + X_0(\omega - 2\Omega_p - \Delta\Omega_p)]$$



În urma filtrării acestui semnal (cu un FTJ) spectrul semnalului demodulat are expresia:

$$X_D(j\omega) = \frac{1}{2} F\{x_0(t) \cos(\Delta\Omega_p t)\} = \frac{1}{2} [X_0(\omega + \Delta\Omega_p) + X_0(\omega - \Delta\Omega_p)] \quad (2.39)$$

Spectrul semnalului demodulat astfel obținut este prezentat în figura 2.14. Se observă că o abatere  $\Delta\Omega_p$ , oricât de mică, dă naștere unor distorsiuni foarte mari, datorită faptului că are loc o suprapunere a celor două spectre de joasă frecvență axate pe  $\pm \Delta\Omega_p$ .

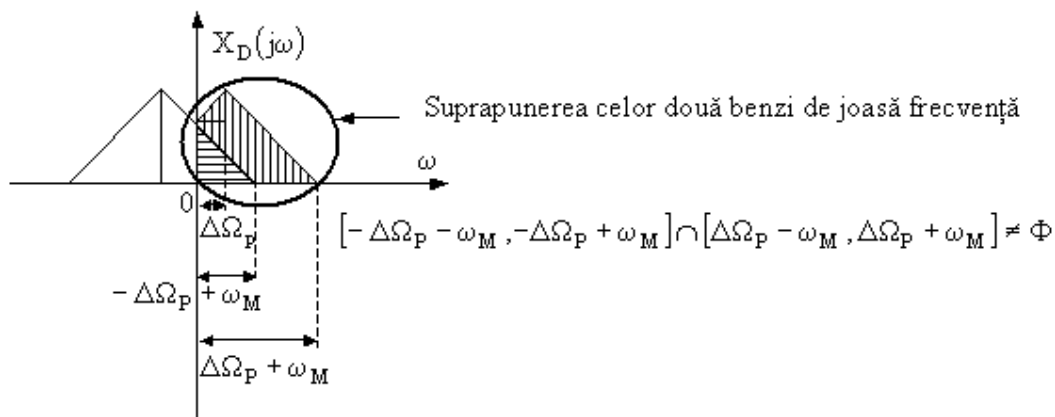


Fig. 2.14 Apariția distorsiunilor în cazul detecției sincrone a semnalelor MA-PS

Prin urmare, este foarte important ca frecvențele purtătoare de la emisie și recepție să fie identice, fapt ce implică un circuit foarte costisitor la recepție.

Metoda prezentată, de obținere a semnalului MA-PS, este denumită detecție sincronă, sau detecție coerentă.

## B. Demodularea semnalului MA-BLU

Obținerea semnalului original (modulator)  $x_0(t)$  din semnalul modulat  $x_{MA-BLU}$  se face prin detecție sincronă. Notând cu  $x_{(MA-BLU)_1}(t)$  semnalul BLU-PS corespunzător BLS, a cărui spectru este reprezentat în figura 2.15a), se poate determina transformata Fourier a semnalului reconstruit  $x_R(t)$ , (obținut prin înmulțirea semnalului  $x_{(MA-BLU)_1}(t)$  cu  $\cos(\Omega_p t)$ ), a cărei expresie este următoarea:

$$\begin{aligned} X_R(\omega) &= F\{x_{(MA-BLU)_1}(t) \cos(\Omega_p t)\} = \\ &= \frac{1}{2} [X_{(MA-BLU)_1}(\omega + \Omega_p) + X_{(MA-BLU)_1}(\omega - \Omega_p)] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Scriind pe  $X_{(MA-BLU)_1}(\omega)$  ca o sumă de două transformate Fourier,

$$X_{(MA-BLU)_1}(\omega) = X_{(MA-BLU)_1}^-(\omega) + X_{(MA-BLU)_1}^+(\omega) \quad (2.41)$$

unde  $X_{(MA-BLU)_1}^-(\omega)$ ;  $X_{(MA-BLU)_1}^+(\omega)$  sunt spectrele reprezentate în figura 2.15a), din relațiile (2.40) și (2.41) rezultă că:

$$\begin{aligned} X_R(\omega) &= \frac{1}{2} [X_{(MA-BLU)_1}^-(\omega - \Omega_p) + X_{(MA-BLU)_1}^+(\omega + \Omega_p)] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \underbrace{X_{(MA-BLU)_1}^-(\omega + \Omega_p) + X_{(MA-BLU)_1}^+(\omega - \Omega_p)}_{X_0(\omega)} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Descompunerea (2.41), deși artificială (deoarece nu există funcții de timp reale care să aibă astfel de transformate Fourier), este utilă deoarece facilitează reprezentare grafică a spectrului semnalului reconstruit  $X_R(\omega)$ - vezi figura 2.15b).

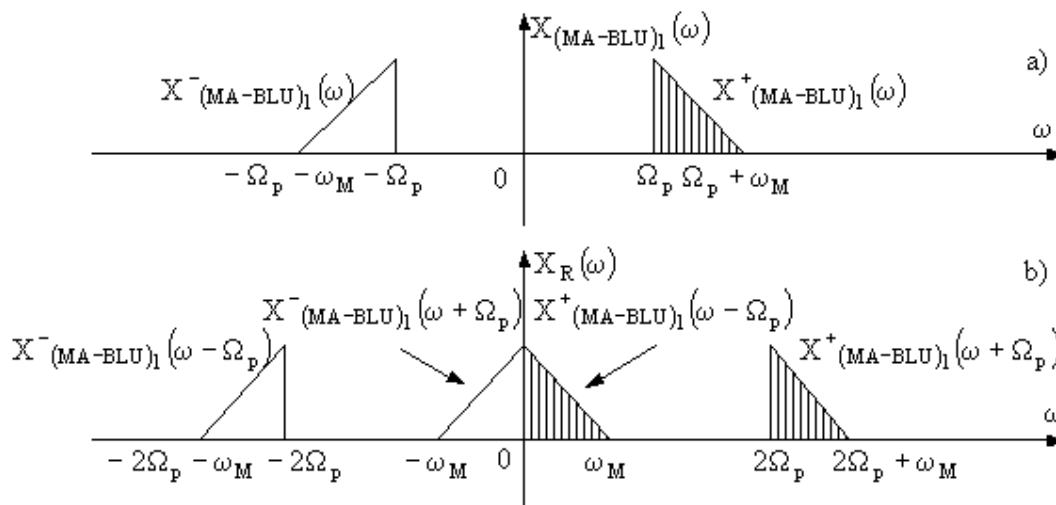


Fig. 2.15 Demodularea semnalului MA-BLU

Se observă că prin demodularea semnalului MA-BLU, se obține semnalul original  $X_0(j\omega)$ , împreună cu un semnal adițional de tip MA-BLU, translatat la  $\pm 2\Omega_p$ . Extragerea semnalului modulator  $x_0(t)$  se realizează utilizând un FTJ.

Demodularea semnalelor MA-BLU fiind identică cu cea a semnalelor MA-PS rezultă că și circuitele utilizate pentru modulare vor fi identice.

### C. Demodularea semnalului MA

Semnalele MA pot fi demodulate utilizând principiul detecției sincrone, prezentată la demodularea semnalelor MA-PS și MA-BLU.

Datorită distorsiunilor de la recepție ce apar în cazul abaterilor în frecvență, semnalele MA pot fi demodulate cu circuite mult mai simple și anume: detectoare redresoare sau detectoare de anvelopă.

În continuare se prezintă principiul utilizat în cazul detecției anvelopei semnalului MA.

Schema bloc a detectorului de anvelopă este prezentă în figura 2.16.

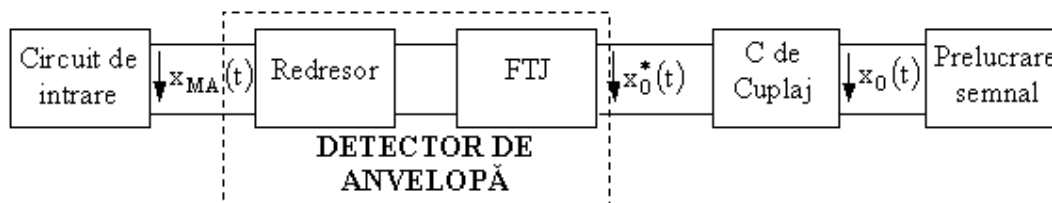


Fig.2.16 Schema bloc a detectorului de anvelopă

Detectorii sunt destinați “transformării” unui semnal de înaltă frecvență, modulat în amplitudine, într-un semnal de joasă frecvență, identic cu semnalul modulator. Detectorii cu elemente neliniare sunt cel mai des întâlnite în tehnica radiorecepției.

Prin detecție trebuie să se obțină informația aflată în anvelopa semnalului, deci practic trebuie urmărite doar valorile maxime ale semnalului MA.

În figura 2.17 este prezentată schema electrică a unui detector cu dioda serie.

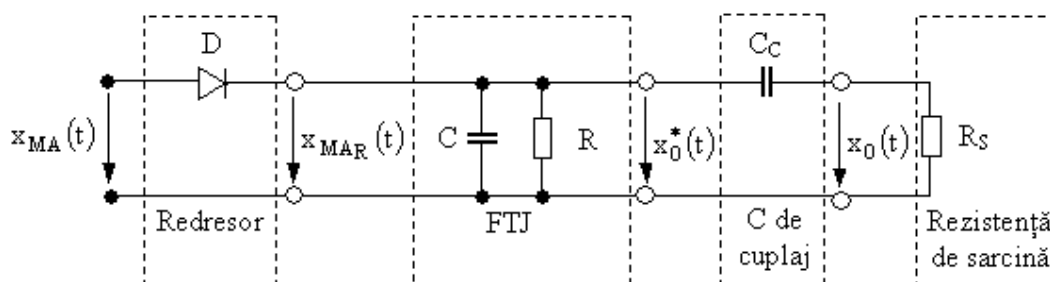


Fig.2.17 Schema detectorului cu dioda serie

Funcționarea detectorului de anvelopă, privită la scara de timp corespunzătoare oscilației de înaltă frecvență (semnalul purtător) este următoarea:

- Pe fiecare maxim al alternanței pozitive, dioda D se va deschide încărcând condensatorul C;
- Condensatorul se încarcă/descarcă lent cu constanta de timp RC și în acest caz semnalul de la ieșire va urmări anvelopa semnalului modulat în amplitudine.

În continuare se va prezenta rolul fiecărui circuit ce intră în componența schemei bloc a detectorului de anvelopă, precum și semnalele obținute la ieșirea fiecărui asemenea circuit.

a) Circuit de intrare

Circuitul de intrare (antena, circuit de acord, amplificator de frecvențe intermediare...) are rolul ca din multitudinea de semnale emise în eter să selecteze semnalul dorit a fi recepționat.

Acest semnal, modulat în amplitudine, constituie semnalul de intrare pentru detectorul de anvelopă.

b) Circuitul de redresare

În cazul în care semnalul de intrare este semnalul modulat în amplitudine, la ieșirea circuitului de redresare se obține semnalul  $x_{MAR}(t)$  prezentat în figura 2.18.

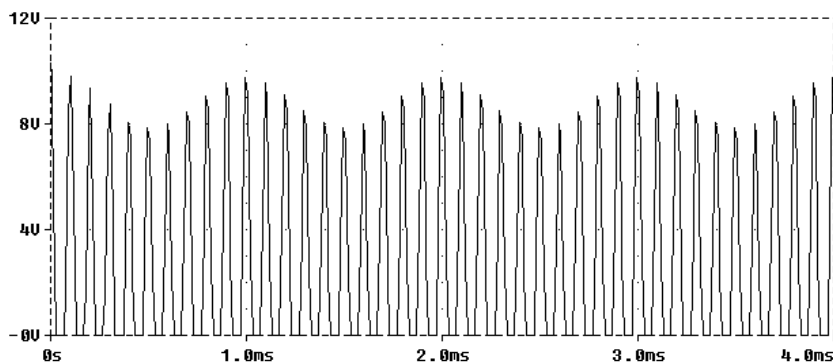


Fig.2.18 Semnalul obținut la ieșirea circuitului de redresare

c) Circuitul de filtrare FTJ

Pentru a urmări valorile maxime ale semnalului MA, a obține de fapt înfășurătoarea semnalului, trebuie să nu se permită semnalului odată ajuns într-un maxim să scadă în zero. Acest lucru se va realiza cu ajutorul circuitului de filtrare.

- În intervalul de timp în care dioda D este deschisă, tensiunea de pe rezistorul R urmărește tensiunea de intrare  $x_0^*(t) = x_{MAR}(t)$ .

➤ În intervalul de timp în care dioda D este blocată, tensiunea de pe rezistorul R are expresia  $x_0^*(t) = U_M e^{-\frac{t}{\tau}}$ , unde:

$$\begin{aligned} U_M & \text{ este amplitudinea tensiunii } x_{MA_R}(t) \\ \tau & = RC \text{ (constanta de timp a circuitului RC)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Semnalul obținut la ieșirea circuitului de filtrare  $x_0^*(t)$  este prezentat în figura 2.19.

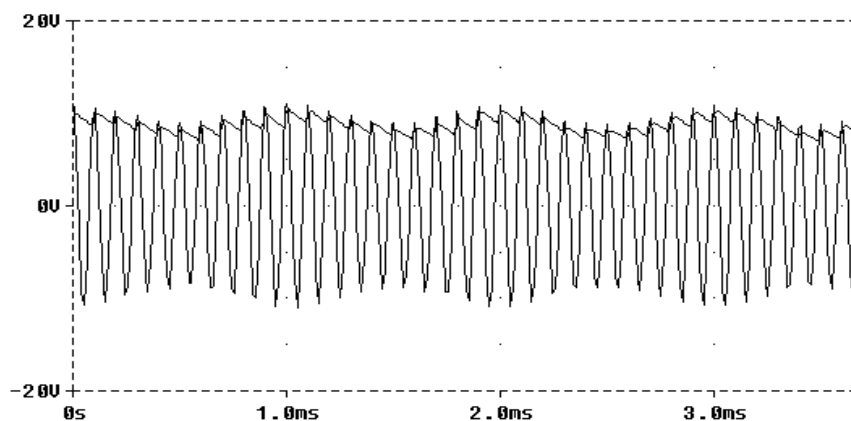


Fig.2.19 Semnalul obținut la ieșirea circuitului de filtrare (plasat pe semnalul MA)

Observație:

➤ Expresiile tensiunii de la ieșire circuitului de filtrare,  $x_0^*(t)$ , prezentate anterior sunt determinate în cazul în care dioda D este ideală (caracteristica diodei s-a considerat liniară în zona de conducție, s-a neglijat tensiunea de deschidere a diodei,  $r_d = 0$ ,  $R_i = \infty$ ).

Pentru a nu apărea distorsiuni (semnalul  $x_0^*(t)$  trebuie să urmărească anvelopa semnalului), constanta de timp a circuitului RC  $\tau = RC$ , trebuie să îndeplinească următoarele două condiții:

$$1) \quad \tau \gg T_p = \frac{1}{f_p} \quad (2.44)$$

$$\text{unde } T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{2\pi}{\Omega_p}$$

Dacă nu se respectă această condiție apar distorsiuni prezentate în figura 2.20a).

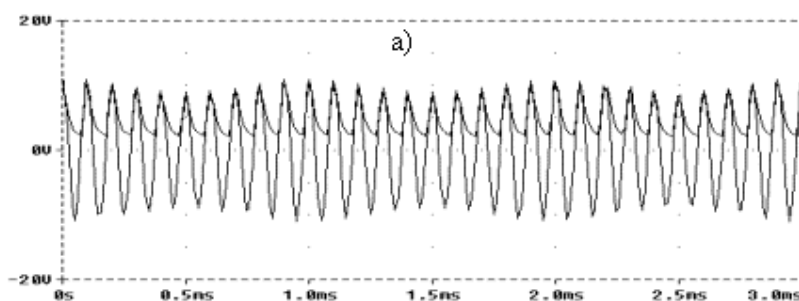


Fig.2.20a) Distorsiuni ce pot apărea la ieșirea FTJ, pentru valori mici ale constantei de timp a circuitului RC

$$2. \quad \tau \langle T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (2.45)$$

$$\text{unde } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Dacă nu se respectă această condiție apar distorsiuni de neurmărire prezentate în figura 2.20b).

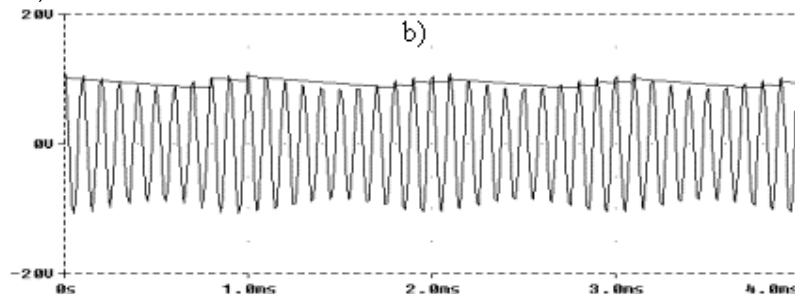


Fig.2.20a) Distorsiuni de neurmărire ce pot apărea la ieșirea FTJ

În concluzie, la proiectarea FTJ trebuie respectată condiția:

$$\frac{1}{f_0} \gg \tau \gg \frac{1}{f_p} \quad (2.46)$$

d) Condensatorul de cuplaj

Semnalul obținut la ieșirea circuitului de filtrare  $x_0^*(t)$  conține o componentă continuă. În figura 2.21 este prezentat semnalul  $x_0^*(t)$  comparativ cu semnalul modulator  $x_0(t)$ .

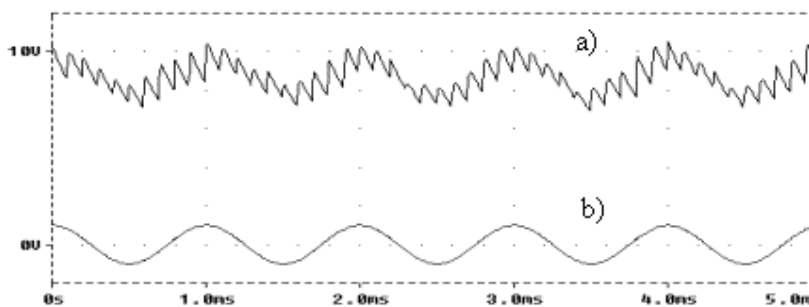


Fig. 2.21 a) Semnalul de la ieșirea circuitului de filtrare  $x_0^*(t)$ ; b) Semnalul modulator  $x_0(t)$

Condensatorul de cuplaj  $C_C$  are rolul de a anula componentei continue a semnalului  $x_0^*(t)$ .

În figura 2.22 este prezentat comparativ semnalul obținut în urma demodulării utilizând detectorul de anvelopă, cu semnalul modulator.

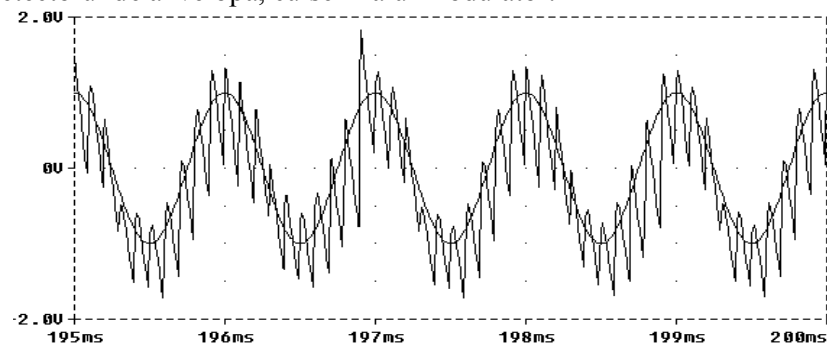


Fig.2.22 Semnalul demodulat (fără componentă continuă) și semnalul modulator

Este acum ușor de înțeles de ce gradul de modulație  $m$  trebuie să respecte condiția (2.6),  $m < 1$ . Pentru  $m > 1$ , figura 2.4b), suprimând alternanța negativă, se obține o înfășurătoare a semnalului MA redresat care nu mai reproduce forma de undă a semnalului modulator.

Pentru același motiv, demodulare prin redresare (în acest caz cu detector de anvelopă), nu poate fi utilizată în cazul semnalelor MA-PS și MA-BLU.

#### 2.2.4. Comparație între sistemele de modulație în amplitudine

În cazul fiecăruia din tipurile de modulație în amplitudine prezentate anterior (MA, MA-PS și MA-BLU), se vor analiza următoarele trei caracteristici:

- Largimea de bandă a semnalului emis;
- Puterea necesară la emisie;
- Complexitatea circuitului de demodulare utilizat la recepția semnalului.

##### A. Sistemele MA

- Semnalul emis ocupă o bandă relativ mare  $B_{MA} = 2\omega_M$  (**Dezavantaj**);
- Aparatura de emisie trebuie să transmită o putere mare (**Dezavantaj**);

În semnalele MA purtătorul nu conține nici un fel de informație și deci puterea semnalului MA corespunzătoare purtătorului reprezintă o risipă.

Examinarea conținutului relativ de puteri al semnalului MA duce la constatarea că puterea corespunzătoare purtătorului este mult mai mare decât puterea utilă corespunzătoare benzilor laterale (care conțin informația).

Analizând semnalul modulat în amplitudine la care mesajul (semnalul modulator) este o sinusoidă (2.8) și ținând cont de faptul că puterile sunt proporționale cu pătratele amplitudinilor, raportul dintre puterea utilă și puterea totală a semnalului MA, randamentul sau eficiența procesului de emisie, are următoarea expresie:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{2 \left( \frac{mA_p}{2} \right)^2}{2 \left( \frac{mA_p}{2} \right)^2 + A_p^2} = \frac{m^2}{m^2 + 2} \quad (2.47)$$

Randamentul este maxim în cazul în care  $m = 1$ , rezultând că:

$$\eta_{\max} = \left( \frac{P_u}{P_t} \right)_{\max} = \frac{1}{3} \quad (2.48)$$

În concluzie eficiența transmisiei este de 33%. Pentru indici de modulație subunitari această eficiență scade ( de exemplu  $m = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta = \left( \frac{P_u}{P_t} \right) = 0.11$ )

- Circuitul de demodulare are o structură simplă (**Avantaj**);

Detecția semnalelor MA se realizează simplu utilizând circuite de detecție de anvelopă. Ca atare acest sistem de MA este indicat a fi utilizat atunci când echipamentele de recepție trebuie să fie simple (în radiodifuziune de exemplu).

##### B. Sistemele MA-PS

- Semnalul emis ocupă o bandă relativ mare  $B_{MA-PS} = B_{MA} = 2\omega_M$  (**Dezavantaj**);
- Aparatura de emisie trebuie să transmită o putere mică (**Avantaj**);

Eficiența emisiei este în acest caz de 100%, deoarece nu se transmite semnalul purtător ci doar benzile laterale ce conțin informația.

- Circuitul de demodulare are o structură complexă (**Dezavantaj**);

Pentru a realiza detecția sincronă, purtătorul care trebuie generat la recepție trebuie să fie perfect identic cu cel de la emisie. Uneori se lasă în semnal un rest de purtător care se utilizează la detecție. Transmisia cu semnale MA-PS este folosită în sistemele telefonice prin radio la distanțe foarte mari sau în legăturile telefonice pe linii de înaltă tensiune.

### C. Sistemele MA-BLU

➤ Semnalul emis ocupă o bandă relativ îngustă  $B_{MA-BLU} = \omega_M$  (**Avantaj**);

➤ Aparatura de emisie trebuie să transmită o putere mică (**Avantaj**);

Eficiența emisie este în acest caz de 100%, din aceleași considerente prezentate la sistemele MA-PS.

➤ Circuitul de demodulare are o structură complexă (**Dezavantaj**);

Pentru a realiza detecția sincronă, purtătorul care trebuie generat la recepție trebuie să fie perfect identic cu cel de la emisie. Transmisia cu semnale MA-BLU este folosită în sistemele telefonice și telegrafice multiple.

### 2.2.5. Analiza spectrală a semnalelor modulate în frecvență (M.F.)

Pentru a stabili expresiile semnalelor modulate în frecvență este necesar să se definească noțiunea de funcție sinusoidală generalizată. În cazul funcției sinusoidale generalizate cei trei parametri ce o caracterizează (amplitudine, frecvență și fază inițială) nu sunt constanți în timp ci variabili. Cazul amplitudinii variabile în timp a fost tratat în cazul analizei semnalelor modulate în amplitudine.

Semnalul sinusoidal generalizat are expresia:

$$x(t) = A \cos \Phi(t) \quad (2.48)$$

unde  $\Phi(t)$  reprezintă faza semnalului la un moment dat și se numește faza instantanee a semnalului.

a) Din punctul de vedere al fazei instantanee, diferențele între un semnal sinusoidal generalizat și un semnal sinusoidal propriu-zis sunt următoarele:

➤  $\Phi(t)$  este o funcție liniară în timp în cazul un semnalului sinusoidal propriu-zis, de expresie:

$$\Phi(t) = \Omega_0 t + \Phi_0 \quad (2.49)$$

➤  $\Phi(t)$  este o funcție de timp oarecare în cazul un semnalului sinusoidal generalizat; Frecvența instantanee a semnalului,  $\Omega_i$ , este definit ca viteza de variație a fazei în timp, având expresia:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (2.50)$$

b) Din punctul de vedere al frecvenței instantanee, diferențele între un semnal sinusoidal generalizat și un semnal sinusoidal propriu-zis sunt următoarele:

➤  $\Omega_i(t)$  este o constantă în cazul un semnalului sinusoidal propriu-zis, de expresie:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d(\Omega_0 t + \Phi_0)}{dt} = \Omega_0 \quad (2.51)$$

➤  $\Omega_i(t)$  variază în timp în cazul un semnalului sinusoidal generalizat.

Observație

➤ Conform definiției frecvenței instantanee în cazul semnalului sinusoidal generalizat (2.50), expresia matematică a fazei instantanee se poate scrie după cum urmează:

$$\Phi(t) = \int_t \Omega_i(t) dt \quad (2.52)$$

Conform precizărilor anterioare privitoare la semnalul sinusoidal generalizat urmează a se stabili expresiile analitice ale semnalelor MF.

A modula în frecvență semnalul purtător  $x_p(t)$ , înseamnă a crea o dependență liniară între frecvența instantanee,  $\Omega_i$  a purtătorului și semnalul modulator  $x_0(t)$ , conform relației:

$$\Omega_i(t) = \Omega_p + kx_0(t) \quad (2.53)$$

unde  $-k$  este constanta modulatorului de fază.

O exemplificare a modalității de variație a frecvenței instantanee  $\Omega_i(t)$ , în cazul în care semnalul modulator este periodic, de perioadă  $T_0$ , având expresia

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & t \in \left(0, \frac{T_0}{2}\right) \\ \Omega_p & t \in \left(\frac{T_0}{2}, T_0\right) \end{cases},$$

iar  $k$  este o constantă egală cu unitatea este prezentată în figura 2.23

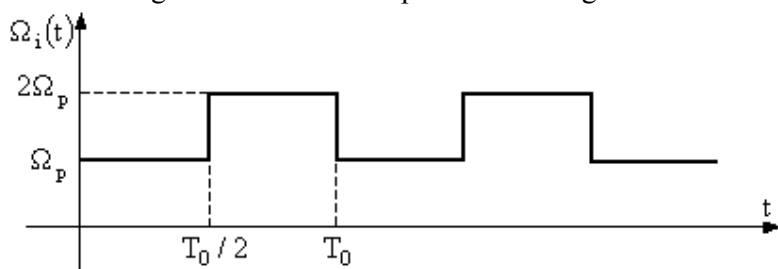


Fig.2.23 Variația în timp a frecvenței instantanee  $\Omega_i(t)$ , a semnalului MF

Conform (2.52), faza instantane a semnalului modulat în frecvență devine:

$$\Phi(t) = \int_t \Omega_i(t) dt = \int_t (\Omega_p + kx_0(t)) dt = \Omega_p t + k \int_t x_0(t) dt + \Phi_p \quad (2.54)$$

iar semnalului modulat în frecvență (în forma generală) are expresia:

$$x_{MF}(t) = A_p \cos \Phi(t) = A_p \cos \left[ \Omega_p t + k \int_t x_0(t) dt + \Phi_p \right] \quad (2.55)$$

În cazul în care semnalul modulator  $x_0(t)$  este nul pentru valori negative ale timpului, iar constanta  $\Phi_p$  este considerată nulă, expresia generală a unui semnal MF devine:

$$\begin{aligned} x_{MF}(t) &= A_p \cos \left[ \Omega_p t + k \int_t x_0(t) dt \right] = \\ &= A_p \cos(\Omega_p t) \cos \left[ k \int_t x_0(t) dt \right] - A_p \sin(\Omega_p t) \sin \left[ k \int_t x_0(t) dt \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

În continuare se prezintă expresia semnalului MF în cazul în care semnalul modulator este sinusoidal.

Semnalul modulator este de forma (2.5),  $x_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  iar semnalul purtător sinusoidal are expresia (2.2),  $x_p(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$ .



Frecvența instantanee,  $\Omega_i$ , conform (2.53) are expresia:

$$\Omega_i(t) = \Omega_p + k a_0 \cos \omega_0 t = \Omega_p + \Delta\Omega \cos \omega_0 t \quad (2.57)$$

unde  $\Delta\Omega = k a_0 = 2\pi\Delta f$  se numește deviație de frecvență a semnalului MF și măsoară depărtarea maximă a frecvenței instantanee  $\Omega_i(t)$  față de  $\Omega_p$ .

În figura 2.24 este prezentată variația în timp a frecvenței instantanee pentru două valori ale deviației în frecvență.

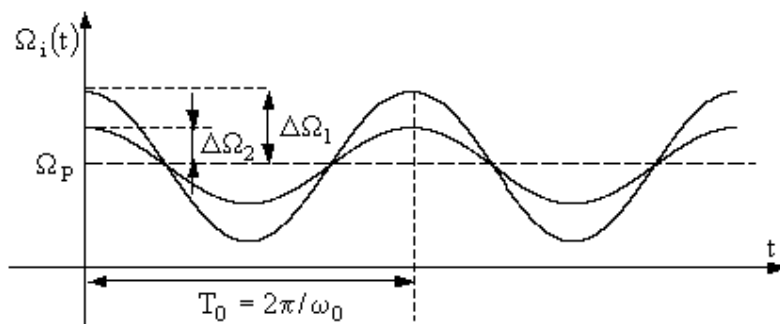


Fig.2.24 Variația în timp a frecvenței instantanee  $\Omega_i(t)$ , a semnalului MF pentru două valori ale deviației în frecvență  $\Delta\Omega_1 > \Delta\Omega_2$  (semnal modulator sinusoidal)

Faza instantanee,  $\Phi(t)$ , conform (2.52) are expresia:

$$\Phi(t) = \int_t \Omega_i(t) dt = \int_t (\Omega_p + \Delta\Omega \cos \omega_0 t) dt = \Omega_p t + \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (2.58)$$

Notând

$$\beta = \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \quad (2.59)$$

ce poartă numele de indice de modulație în frecvență, expresia analitică a semnalului MF, devine:

$$x_{MF}(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \beta \sin \omega_0 t) \quad (2.60)$$

Relația (2.60) se poate scrie și astfel:

$$x_{MF}(t) = A_p [\cos(\Omega_p t) \cos(\beta \sin \omega_0 t) - \sin(\Omega_p t) \sin(\beta \sin \omega_0 t)] \quad (2.61)$$

Observație:

- Funcția  $\cos(\beta \sin \omega_0 t)$  este pară, periodică de perioadă  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ;
- Funcția  $\sin(\beta \sin \omega_0 t)$  este impară, periodică de perioadă  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ;

Dezvoltând în serie Fourier cele două funcții, se obțin expresiile:

$$\cos(\beta \sin \omega_0 t) = J_0(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos(2k \omega_0 t) \quad (2.62)$$

$$\sin(\beta \sin \omega_0 t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cos[(2k+1)\omega_0 t]$$

Coefficienții  $J_k(\beta)$  reprezintă valorile funcțiilor Bessel,  $J_k(x)$  de speța întâi și ordinul  $k$ , calculate pentru  $x = \beta$ .

În figura 2.25 sunt reprezentate grafic funcțiile Bessel de speța I și ordinul  $k$ .

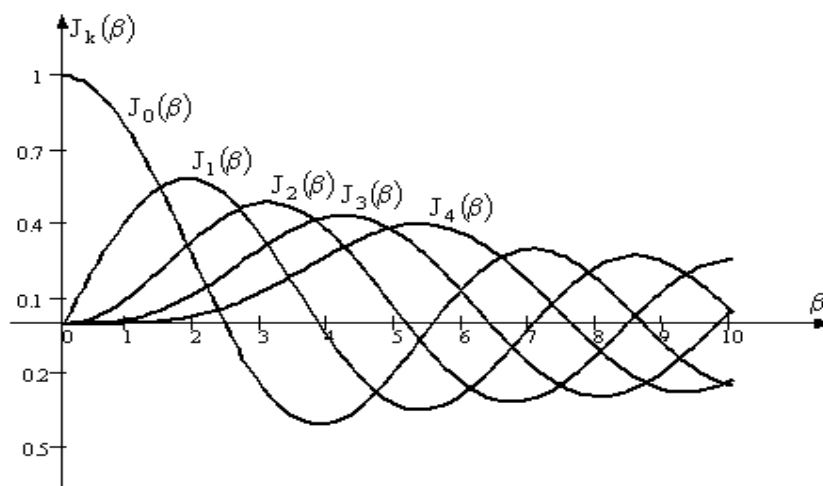


Fig.2.25 Reprezentarea grafică a funcțiilor Bessel de speța I și ordinul k

Aplicând expresiei (2.61) dezvoltările în serie Fourier (2.62), expresia unui semnal MF devine:

$$x_{MF}(t) = A_p J_0(\beta) \cos(\Omega_p t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_n(\beta) \cos(\Omega_p + n \omega_0)t + (-1)^n J_n(\beta) \cos(\Omega_p - n \omega_0)t \right] \quad (2.63)$$

În figura 2.26 sunt reprezentate grafic formele de undă ale semnalului purtător și ale unui semnal MF pentru două valori ale indicelui de modulație în frecvență  $\beta$ . De asemenea este prezentată variația în timp a frecvenței instantanee pentru toate cele trei cazuri.

Aceste reprezentări grafice permit o mai bună înțelegere a principiului de modulație în frecvență.

Pentru determinarea spectrului de frecvențe al unui semnal MF se are în vedere următoarele observații:

- Conform expresiei generale a semnalului MF, (2.56), se constată că evaluarea spectrului de frecvențe este complicată din punct de vedere matematic datorită apariției expresiei  $\int_t x_0(t) dt$  în argumentul funcțiilor trigonometrice;

- În cazul în care semnalul modulator este un semnal sinusoidal, prin intermediul expresiei (2.63) a semnalului MF se pun în evidență componentele spectrale ale acestuia. Se constată că semnalul MF conține un număr infinit de componente nu numai trei cum avea semnalul MA.

Teoretic, lățimea de bandă ocupată de semnalul MF este infinită. Practic, amplitudinile componentelor spectrale depărtate de  $\Omega_p$  devin neglijabile, aproape toată energia semnalului MF fiind conținută în componentele spectrale localizate în interiorul unei benzi finite.

Ca urmare a acestei ultime considerații și pe baza celor două observații anterioare, metoda de prezentare a spectrului semnalului MF este următoarea:

- Se alege criteriul matematic după care semnalele MF se clasifică în semnale de bandă îngustă sau bandă largă;

- În cadrul fiecărei din cele două categorii se precizează criteriile matematice pentru semnalul MF prezentat în formă generală (2.56), sau particulară (2.63) - semnalul modulator fiind un semnal sinusoidal.

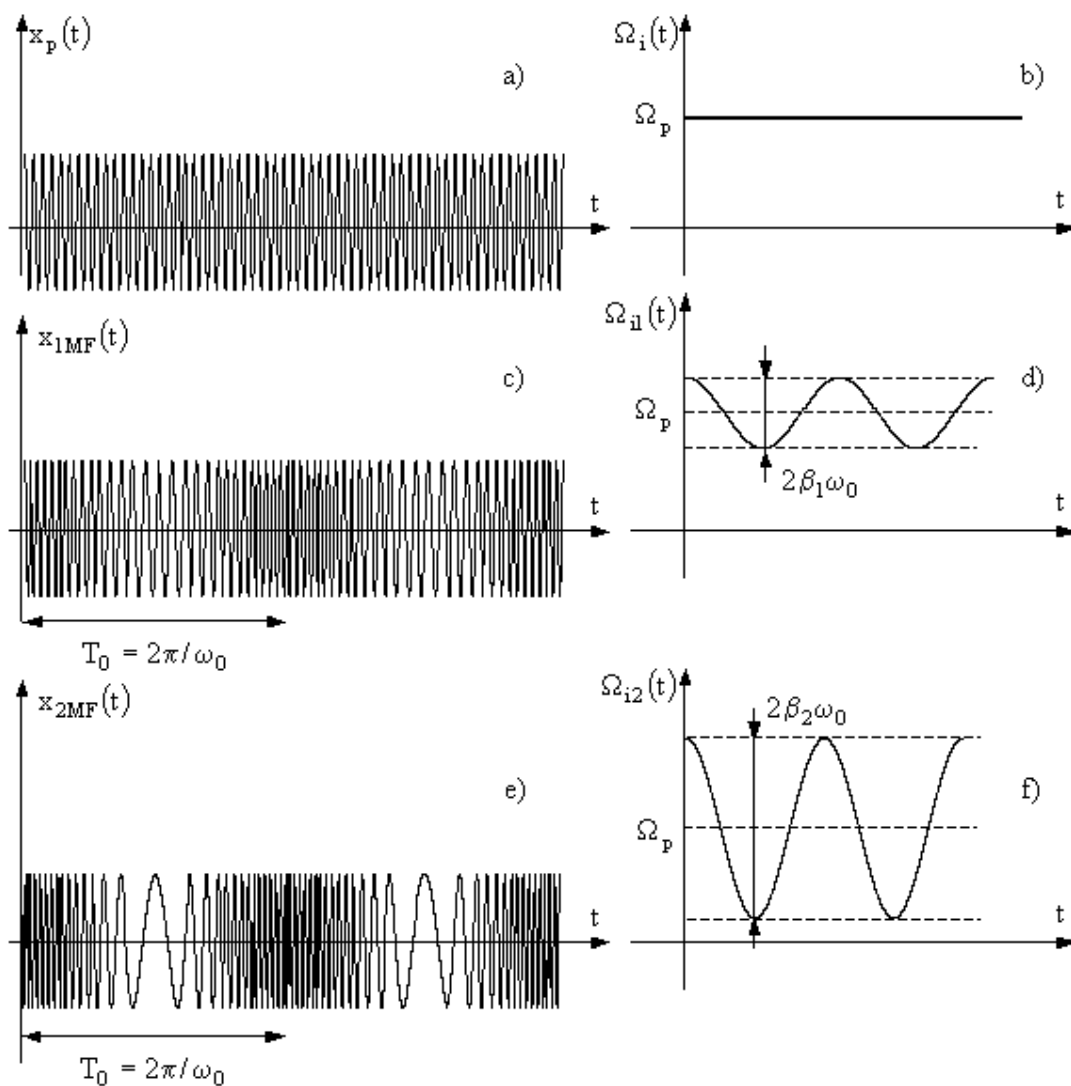


Fig.2.26 Reprezentările grafice corespunzătoare: a) semnalului purtător; b) frecvenței instantanee a semnalului purtător; c) semnalului MF  $\beta = \beta_1 = 10$ ; d) frecvenței instantanee a semnalului MF  $\beta = \beta_1 = 10$ ; e) semnalului MF  $\beta = \beta_2 = 25$ ; f) frecvenței instantanee a semnalului MF  $\beta = \beta_2 = 25$ ;

**A. Semnale MF de bandă îngustă**

**A1.Semnal MF cu modulator oarecare**

Condiția matematică pentru ca un asemenea semnal să aibă banda de frecvență îngustă este următoarea:

$$k \int_t x_0(t) dt \Big|_{\max} \ll \frac{\pi}{2} \tag{2.64}$$

Conform condiției (2.64), se pot face următoarele aproximări:

$$\begin{aligned} \cos \left[ k \int_t x_0(t) dt \right] &\approx 1 \\ \sin \left[ k \int_t x_0(t) dt \right] &\approx k \int_t x_0(t) dt \end{aligned} \tag{2.65}$$

Conform (2.65), expresia semnalului MF de bandă îngustă, devine:

$$x_{MF}(t) = A_p \left[ \cos(\Omega_p t) - k \left( \int_t x_0(t) dt \right) \sin(\Omega_p t) \right] \quad (2.66)$$

În acest caz densitatea spectrală de amplitudine a semnalului MF are expresia:

$$F\{x_{MF}(t)\} = X_{MF}(\omega) = A_p F \left\{ \cos(\Omega_p t) - k \left( \int_t x_0(t) dt \right) \sin(\Omega_p t) \right\} \quad (2.67)$$

Conform (1.114), calculul densității spectrale a unui impuls cosinusoidal, rezultă că:

$$F\{\cos(\Omega_p t)\} = \pi [\delta(\omega - \Omega_p) + \delta(\omega + \Omega_p)]$$

Conform (1.101) se obține că:

$$F \left\{ k \left( \int_t x_0(t) dt \right) \sin(\Omega_p t) \right\} \stackrel{(1.101)}{=} kF \left\{ \frac{e^{j\Omega_p t} - e^{-j\Omega_p t}}{2j} \left( \int_t x_0(t) dt \right) \right\}$$

Notând cu  $g(t) = \int_t x_0(t) dt$  și utilizând proprietatea (1.69) de deplasare a spectrului

(modularea) a transformatei Fourier, rezultă că:

$$F \left\{ k \left( \int_t x_0(t) dt \right) \sin(\Omega_p t) \right\} \stackrel{(1.114)}{=} -\frac{jk}{2} [G(\omega - \Omega_p) - G(\omega + \Omega_p)]$$

unde,

$$G(\omega) = F \left\{ \int_t x_0(t) dt \right\}$$

Conform proprietății (1.72) de integrare în timp a transformatei Fourier rezultă că:

$$G(\omega) = \frac{X_0(\omega)}{j\omega}$$

unde,

$$X_0(\omega) = F\{x_0(t)\}$$

Conform observațiilor anterioare spectrul semnalului MF de bandă îngustă are expresia:

$$X_{MF}(\omega) = A_p \pi [\delta(\omega - \Omega_p) + \delta(\omega + \Omega_p)] + \frac{kA_p}{2} \left[ \frac{X_0(\omega - \Omega_p)}{\omega - \Omega_p} - \frac{X_0(\omega + \Omega_p)}{\omega + \Omega_p} \right] \quad (2.68)$$

Se observă că spectrul semnalului MF de bandă îngustă este similar cu cel al semnalului MA, expresia (2.21), obținându-se și în acest caz purtătorul și cele două benzi laterale.

Reprezentarea grafică a spectrelui semnalului MF de bandă îngustă (cu semnal modulator oarecare) este prezentat în figura 2.27.

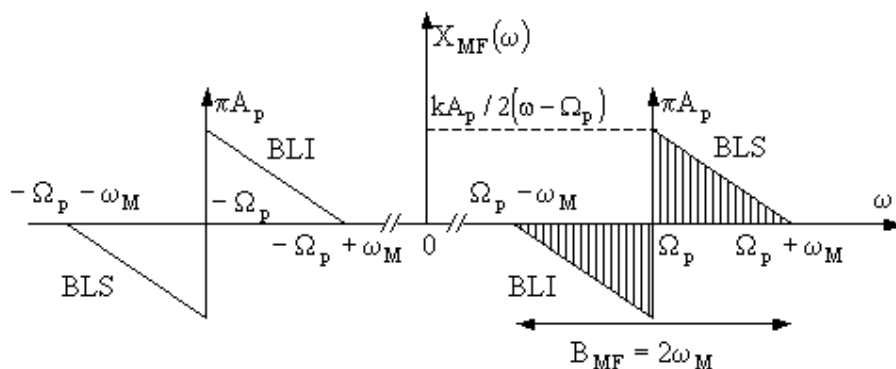


Fig. 2.27 Diagrama spectrală a semnalului MF de bandă îngustă (semnal modulator oarecare)

Observație:

- Doar spectrul corespunzător frecvențelor (pulsățiilor) pozitive,  $\omega > 0$ , au semnificație fizică (în figura 2.27 reprezentările grafice hașurate);
- Spectrul semnalului modulator este limitat la valoarea  $\omega_M$ , fiind un spectru de joasă frecvență;
- Din expresia (2.68) se constată că spectrul semnalului MF,  $X_{MF}(\omega)$  conține trei componente spectrale:
  - un impuls localizat la frecvența  $\Omega_p$ , de amplitudine  $\pi A_p$ ;
  - bandă laterală superioară -BLS- plasată în intervalul  $(\Omega_p, \Omega_p + \omega_M)$ ;
  - bandă laterală inferioară -BLI- plasată în intervalul  $(\Omega_p - \omega_M, \Omega_p)$ ;
    - Banda laterală inferioară este în opoziție de fază cu banda laterală superioară. Din

punct de vedere matematic, acest lucru este evidențiat prin semnul raportului  $\frac{X_0(\omega - \Omega_p)}{\omega - \Omega_p}$ ,

astfel:

$$\frac{X_0(\omega - \Omega_p)}{\omega - \Omega_p} > 0, \text{ dacă } (\omega - \Omega_p) > 0;$$

$$\frac{X_0(\omega - \Omega_p)}{\omega - \Omega_p} < 0, \text{ dacă } (\omega - \Omega_p) < 0;$$

- Banda de frecvențe ocupată de semnalul M.F. de bandă îngustă este:
 
$$B_{MF(\text{banda îngustă})} = 2\omega_M \quad (2.69)$$

Deși din punct de vedere al spectrelor semnalele MA și MF de bandă îngustă au multe asemănări, formele lor de undă sunt totuși foarte diferite. La un semnal MA, frecvența este constantă și amplitudinea variază în timp, iar la un semnal MF, amplitudinea este constantă și frecvența variază în timp.

## A2.Semnal MF cu modulator sinusoidal

Condiția matematică pentru ca un asemenea semnal să aibă banda de frecvență îngustă este următoarea:

$$\beta \ll \frac{\pi}{2} \quad (2.70)$$

Condiția (2.70) este identică cu condiția (2.64), unde  $\beta$  este parametrul

$$k \left| \int_t x_0(t) dt \right|_{\max}$$

În conformitate cu condiția (2.70) doar termenii de ordinul 0 și 1 ai funcției Bessel de speța întâi au o amplitudine semnificativă (vezi figura 2.25), toți ceilalți termeni,  $J_2(\beta), J_3(\beta)$ ... fiind neglijabili.

În aceste condiții expresia semnalului MF de bandă îngustă, cu modulator sinusoidal devine:

$$x_{MF}(t) = A_p [J_0(\beta) \cos(\Omega_p t) + J_1(\beta) \cos(\Omega_p + n \omega_0)t - J_1(\beta) \cos(\Omega_p - n \omega_0)t] \quad (2.71)$$

Ținând cont că se pot face aproximațiile  $J_0(\beta) \approx 1; J_1(\beta) \approx \frac{1}{2}$ , expresia (2.63) devine:

$$x_{MF}(t) = J_0(\beta) \cos(\Omega_p t) + \frac{1}{2} \cos(\Omega_p + n \omega_0)t - \frac{1}{2} \cos(\Omega_p - n \omega_0)t \quad (2.72)$$

Reprezentarea grafică a spectrelui semnalului MF de bandă îngustă (cu semnal modulator sinusoidal) este prezentat în figura 2.28.

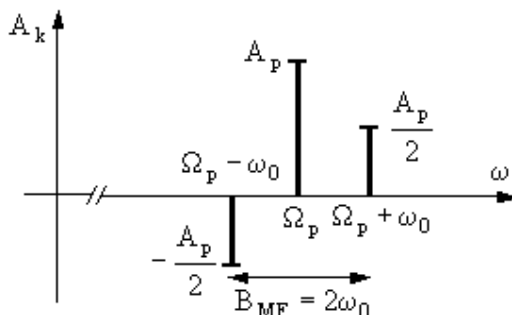


Fig. 2.28 Diagrama spectrală a semnalului MF de bandă îngustă (semnal modulator sinusoidal)

Se remarcă și în acest caz că spectrul semnalului MF de bandă îngustă cu modulator sinusoidal este similar cu cel al semnalului MA. Se observă de asemenea că la componeneta laterală inferioară apare un defazaj de  $\pi$  față de componenta corespunzătoare semnalului MA, ceea ce a fost demonstrat în cazul general (semnal modulator oarecare) al semnalului MF de bandă îngustă.

În concluzie:

$$B_{MF(\text{banda îngustă})} = B_{MA} = 2\omega_0 \quad (2.73)$$

## B. Semnale MF de bandă largă

### B1. Semnal MF cu modulator oarecare

Condiția matematică pentru ca un asemenea semnal să aibă banda de frecvență largă este următoarea:

$$k \left| \int_t x_0(t) dt \right|_{\max} > \frac{\pi}{2} \quad (2.74)$$

Analiza spectrală pentru un semnal modulator,  $x_0(t)$ , oarecare este dificilă. Prin considerarea semnalului modulator ca fiind sinusoidal, analiza se simplifică. Rezultatele obținute prin această ipoteză simplificatoare sunt însă concludente pentru proprietățile unui semnal modulat în frecvență.

### B2. Semnal MF cu modulator sinusoidal

În acest caz expresia matematică a semnalului MF este dată de (2.63), adică:

$$x_{MF}(t) = A_p J_0(\beta) \cos(\Omega_p t) + A_p \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_n(\beta) \cos(\Omega_p + n\omega_0)t + (-1)^n J_n(\beta) \cos(\Omega_p - n\omega_0)t \right]$$

Pentru a înțelege mai ușor modul în care se comportă un semnal MF de bandă largă, se analizează cazul în care indicele de modulație în frecvență,  $\beta = 2$ .

În acest caz doar termenii de ordinul 1, 2, 3 și 4 ai funcției Bessel de speța întâi au o amplitudine semnificativă (vezi figura 2.25), toți ceilalți termeni,  $J_5(\beta), J_6(\beta)$ .. fiind neglijabili.

Componentele spectrale semnificative sunt plasate la următoarele valori ale frecvenței:  $\Omega_p, \Omega_p \pm \omega_0; \Omega_p \pm 2\omega_0; \Omega_p \pm 3\omega_0; \Omega_p \pm 4\omega_0$ .

Banda ocupată de semnal este  $B_{MF(\beta=2)} = (\Omega_p + 4\omega_0) - (\Omega_p - 4\omega_0) = 8\omega_0$

Asupra spectrului unui semnal MF se pot face următoarele observații calitative:

➤ Pe măsură ce indicele de modulație în frecvență  $\beta$  crește, componentele laterale de ordin mai mare devin ne semnificative. Numărul de componente laterale  $N$  care trebuie luat în considerație se determină din considerentul ca ele să conțină 99% din puterea semnalului MF.

➤ Din reprezentările grafice ale funcțiilor Bessel (vezi figura 2.25), se observă că purtătorul conținut în semnalul modulat, de amplitudine  $A_p J_0(\beta)$ , nu mai are totdeauna cea mai mare amplitudine, ca în cazul semnalelor MA.

➤ Pentru valorile lui  $\beta$  la care  $J_0(\beta)$  intersectează abscisa, purtătorul lipsește din semnalul MF. Pentru orice valoare a lui  $\beta$ , amplitudinile componentelor relativ îndepărtate de frecvența componentei centrale  $\Omega_p$ , descresc tinzând spre zero, adică se află în relația:  $J_k(\beta) > J_{k+1}(\beta) > J_{k+2}(\beta) \dots$ ,  $k$  suficient de mare (2.74)

Reprezentarea grafică a spectrului semnalului MF de bandă largă (cu semnal modulator sinusoidal) este prezentat în figura 2.29.

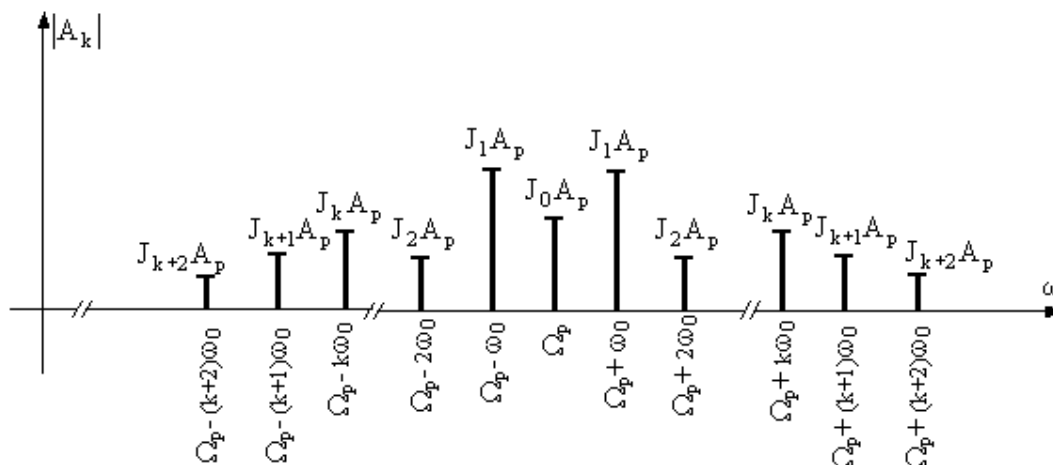


Fig. 2.29 Diagrama spectrală a semnalului MF de bandă largă (semnal modulator sinusoidal)

În concluzie:

$$B_{MF(\text{banda largă})} = 2N\omega_0 = \frac{2N}{\beta} \Delta\Omega \quad (2.75)$$

unde  $N$  este numărul de componente laterale  $N$  ce conțin 99% din puterea semnalului MF.

În continuare se prezintă câteva modalități de a calcula banda de frecvență a unui semnal MF, funcție de indicele de modulație în frecvență,  $\beta$ .

### 1) Indice de modulație de valoare mare $1 < \beta < 15$

a) Varația benzii funcție de  $\beta$ .

În tabelul 2.1. sunt prezentate valorile benzii semnalului MF, funcție de frecvența semnalului modulator  $\omega_0$ , sau a deviației de frecvență  $\Delta\Omega$ , pentru diverse valori ale indicelui de modulație în frecvență  $\beta$ .

Observație:

➤ Pentru valori mari ale indicelui de modulație în frecvență  $4 < \beta < 15$ , banda de frecvență este situată în intervalul:  $B_{MF} \in (3.5 \Delta\Omega, 2.5 \Delta\Omega)$ .

Tab.2.1 Banda de frecvență a semnalului MF, calculată pentru diverse valori ale lui  $\beta$ 

| Indice de modulație $\beta$              | 0.5             | 1               | 2               | 3               | 4                 | 5                 |
|--|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| N  | 2               | 3               | 4               | 6               | 7                 | 8                 |
| $B_{MF} = 2N \omega_0$                   | $4\omega_0$     | $6\omega_0$     | $8\omega_0$     | $12\omega_0$    | $14\omega_0$      | $16\omega_0$      |
| $B_{MF} = \frac{2N}{\beta} \Delta\Omega$ | $8\Delta\Omega$ | $6\Delta\Omega$ | $4\Delta\Omega$ | $4\Delta\Omega$ | $3.5\Delta\Omega$ | $3.2\Delta\Omega$ |

| Indice de modulație $\beta$              | 6               | 7                 | 8               | 9                 | 10                | 15                |
|--|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| N  | 9               | 11                | 12              | 13                | 14                | 19                |
| $B_{MF} = 2N \omega_0$                   | $18\omega_0$    | $22\omega_0$      | $24\omega_0$    | $26\omega_0$      | $28\omega_0$      | $38\omega_0$      |
| $B_{MF} = \frac{2N}{\beta} \Delta\Omega$ | $3\Delta\Omega$ | $3.1\Delta\Omega$ | $3\Delta\Omega$ | $2.9\Delta\Omega$ | $2.8\Delta\Omega$ | $2.5\Delta\Omega$ |

b) Variația benzii funcție de frecvența semnalului modulator  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

În ipoteza în care deviația de frecvență  $\Delta f = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$  este constantă, indicele de modulație  $\beta$ , variază datorită modificării frecvenței semnalului modulator, conform (2.59)  $\beta = \frac{\Delta\Omega}{\omega_0}$ .

În tabelul 2.2. sunt prezentate valorile benzii semnalului MF, precum și variația indicelui de modulație în frecvență  $\beta$  pentru diverse valori ale frecvenței semnalului modulator  $\omega_0$ , pentru cazul particular în care  $\Delta f = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = 100 \text{ kHz}$ .

Tab.2.2 Banda de frecvență a semnalului MF, calculată pentru diverse valori ale lui  $f_0$ , cu  $\Delta f = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = \text{ct.}$ 

| Deviație în frecvență $\Delta f = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = \text{ct. (kHz)}$ | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (kHz)   | 10  | 20  | 33  | 50  | 100 | 200 |
| Indice de modulație $\beta$   | 10  | 5   | 3   | 2   | 1   | 0.5 |
| $B_{MF}$ (kHz)  | 280 | 320 | 400 | 400 | 600 | 800 |

Observație:

► Conform ultimei linii a tabelului 2.2 rezultă că atunci când semnalul modulator este o oscilație cu structură spectrală largă, calculul benzii semnalului MF trebuie efectuat luând în considerare frecvența cea mai mare a oscilației. În această situație (în care se lucrează cu  $\Delta f = \text{ct.}$ ) banda are lărgimea cea mai mare.

## 2) Indice de modulație de valoare foarte mare $\beta > 15$

Transpunerea matematică a observației calitative făcută asupra influenței valorii indicelui de modulație în frecvență  $\beta$ , cum că, **“pe măsură ce indicele de modulație în frecvență  $\beta$  crește, componentele laterale de ordin mai mare devin ne semnificative, iar numărul acestora, N care trebuie luat în considerație se determină din considerentul ca ele să conțină 99% din puterea semnalului MF”**, este următoarea:

$$A_p^2 \sum_{k=-N}^N J_k^2(\beta) = 0.99 A_p^2$$

unde s-a considerat că putere este debitată pe un rezistor de valoare unitară,  $R = 1\Omega$ .



Prin urmare,  $N$  se poate determina din relația:

$$\sum_{k=-N}^N J_k^2(\beta) = 0.99 \quad (2.76)$$

Soluția aproximativă a ecuației transcendente (2.76) este:

$$N \approx \beta + 1 \quad (2.77)$$

ceea ce conduce conform (2.75) la următoarea valoare a benzii:

$$B_{MF(\text{banda largă})} = 2N\omega_0 = 2(\beta + 1)\omega_0 \quad (2.78)$$

Concluzie:

➤ Pentru  $\beta \ll 1$ , bandă îngustă se obține relația (2.73)

$$B_{MF(\text{banda îngustă})} = B_{MA} = 2\omega_0$$

➤ Pentru  $\beta \gg 1$ , bandă largă rezultă că :

$$B_{MF(\text{banda largă})} \approx 2\beta\omega_0 \approx 2\Delta\Omega = 2ka_0 \quad (2.79)$$

Relația (2.79) se putea obține făcând o observație asupra ultimei linii a tabelului 2.1, de unde rezulta că pentru valori foarte mari ale indicelui de modulație în frecvență,  $B_{MF} \rightarrow 2\Delta\Omega$ .

Observație:

➤ Banda necesară pentru transmiterea unui semnal MF de bandă largă este aproximativ egală cu de două ori deviația maximă de frecvență a purtătorului. Aceasta înseamnă că pentru valori ale lui  $\beta$  suficienți de mari, banda efectivă a semnalului MF nu depinde de frecvența mesajului (a semnalului modulator).

## 2.2.6. Analiza spectrală a semnalelor modulate în fază (M.P. sau M.Φ)

A modula în fază semnalul purtător  $x_p(t)$ , înseamnă a crea o dependență liniară între faza,  $\Phi(t)$  a purtătorului și semnalul modulator  $x_0(t)$ , conform relației:

$$\Phi(t) = \Omega_p t + \Phi_p + kx_0(t) \quad (2.80)$$

Expresia cea mai generală a unui semnal modulat în fază este următoarea:

$$x_{M\Phi}(t) = A_p \cos \Phi(t) = A_p \cos[\Omega_p t + \Phi_p + kx_0(t)] \quad (2.81)$$

În cazul în care semnalul modulator  $x_0(t)$  este nul pentru valori negative ale timpului, iar constanta  $\Phi_p$  este considerată nulă, expresia generală a unui semnal MP devine:

$$x_{M\Phi}(t) = A_p \cos[\Omega_p t + kx_0(t)] \quad (2.82)$$

În continuare se prezintă expresia semnalului MP în cazul în care semnalul modulator este sinusoidal (analiza spectrală a semnalului modulat în frecvență este dificilă în cazul în care semnalul modulator este oarecare).

Semnalul modulator este de forma (2.5),  $x_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  iar semnalul purtător sinusoidal are expresia (2.2),  $x_p(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$ .

În acest caz expresia semnalului modulat în fază devine:

$$x_{M\Phi}(t) = A_p \cos[\Omega_p t + ka_0 \cos(\omega_0 t)] \quad (2.83)$$

Se notează

$$\alpha = ka_0 \quad (2.84)$$

mărime ce poartă numele de deviație de fază a semnalului MP.

Prin analogie cu modulația în frecvență,  $\alpha$  se mai numește și indice de modulație în fază.

În timp ce în cazul MF,  $\beta$  este conform (2.59) o deviație de frecvență relativă, în MP,  $\alpha$  este deviația de fază nedepinzând de frecvența mesajului (a semnalului modulator). Conform (2.84) expresia analitică a semnalului MP, devine:

$$x_{M\Phi}(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \alpha \cos \omega_0 t) \quad (2.85)$$

Relația (2.85) se poate scrie și astfel:

$$x_{M\Phi}(t) = A_p [\cos(\Omega_p t) \cos(\alpha \cos \omega_0 t) - \sin(\Omega_p t) \sin(\alpha \sin \omega_0 t)] \quad (2.86)$$

Aplicând expresiei (2.86) dezvoltările în serie Fourier (2.61), expresia unui semnal MP devine:

$$x_{M\Phi}(t) = A_p J_0(\alpha) \cos(\Omega_p t) + A_p \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(\alpha) \cos(\Omega_p + n \omega_0)t + (-1)^n J_n(\alpha) \cos(\Omega_p - n \omega_0)t] \quad (2.87)$$

Toate considerațiile privind spectrul de amplitudini și banda de frecvențe efectivă a semnalelor modulate în frecvență (MF) rămân valabile și în cazul semnalelor modulate în fază (MP). Relația aproximativă pentru determinarea lărgimii benzii de frecvență este echivalentă cu (2.78)

$$B_{M\Phi} = 2(\alpha + 1)\omega_0 \quad (2.88)$$

Pentru valorile indicelui de modulație în fază  $\alpha$  se poate purta următoarea discuție:

### 1) MP de bandă îngustă $\alpha < 1$

$$B_{M\Phi(\text{banda îngustă})} = 2\omega_0 \quad (2.89)$$

Se remarcă în acest caz că spectrul semnalului MP de bandă îngustă cu modulator sinusoidal este similar cu cel al semnalului MA.

### 2) MP de bandă largă $\alpha > 1$

$$B_{MP(\text{banda largă})} \approx 2\alpha\omega_0 \quad (2.90)$$

În acest caz apare o diferență esențială față de semnalele modulate în fază. Deoarece valoarea indicelui de modulație în fază  $\alpha$  nu mai este o deviație relativă de frecvență, banda efectivă a semnalelor MP depinde de frecvența semnalului modulator.

Cu cât spectrul de amplitudini al semnalului modulator este mai bogat, cu atât crește și banda de frecvențe ocupată de semnalul MP.

## 2.2.7. Comparații între modulația în frecvență și modulația în fază

**A. Analizând expresiile analitice ale benzilor de frecvență pentru cele două tipuri de modulație, (2.79), respectiv (2.90) se poate pune în evidență diferența majoră între ele, astfel:**

➤ În cazul modulației în frecvență, cum  $B_{MF(\text{banda largă})} \approx 2\beta\omega_0 \approx 2\Delta\Omega = 2ka_0$ , se observă că banda necesară pentru transmiterea semnalului este aproximativ constantă, nedepinzând de frecvența semnalului modulator;

➤ În cazul modulației în fază, cum  $B_{MP(\text{banda largă})} \approx 2\alpha\omega_0 \approx 2\omega_0 ka_0$ , se observă că banda necesară pentru transmiterea semnalului este direct proporțională cu frecvența semnalului modulator;

Pentru a ilustra independența benzii efective a semnalului MF funcție de frecvența mesajului, precum și dependența benzii efective a semnalului MP față de aceeași mărime se consideră următorul exemplu:

Un semnal purtător  $x_p(t) = \cos(\Omega_p t)$  este modulată în frecvență, respectiv fază, cu un mesaj de tipul  $x_0(t) = \cos(\omega_0 t)$ . Să se calculeze banda de frecvențe ale semnalului astfel modulată pentru patru valori ale frecvenței semnalului modulator:  $f_0 = 0.5 \text{ kHz}; 1 \text{ kHz}; 2 \text{ kHz}; 4 \text{ kHz}$ .

Pentru cazul în care se realizează modulație în frecvență, deviația în frecvență, pentru toate cele patru cazuri, este constantă,  $\Delta f = 4 \text{ kHz}$ .

Pentru cazul în care se realizează modulație în fază, deviația de fază, pentru toate cele patru cazuri, este constantă,  $\alpha = 1$ .

Rezolvare:

1) Modulația în frecvență.

Modulația în frecvență conduce la un semnal de tipul celui dat prin relația (2.63) și având un spectru de amplitudini ca cel reprezentat în figura 2.29.

Pentru a determina lărgimea de bandă se utilizează expresia (2.78)  $B_{MF} = 2N\omega_0$ , unde  $N$  este numărul de armonici ce conțin “cea mai mare parte din informația semnalului”.

Pentru calculul numărului  $N$  de armonici, în cadrul acestei aplicații, se propun două metode (criterii):

Criteriul de putere -  $C_p$ .

Rezolvarea ecuației transcendente (2.76)  $\sum_{k=-N}^N J_k^2(\beta) = 0.99$  de unde rezultă că banda efectivă va conține 99% din puterea semnalului MF.

Criteriul de amplitudine -  $C_a$ .

Banda conține acele componente ce au amplitudinile mai mari de 10% din componenta de amplitudine cea mai mare.

a)  $f_0 = 0.5 \text{ kHz} \Rightarrow \beta = 8$

Valorile funcțiilor  $J_k(\beta) = J_k(8)$  sunt următoarele:

$$J_0(8) = 0.172; J_1(8) = 0.235; J_2(8) = 0.113; J_3(8) = 0.291;$$

$$J_4(8) = 0.105; J_5(8) = 0.186; J_6(8) = 0.338; J_7(8) = 0.321;$$

$$J_8(8) = 0.223; J_9(8) = 0.126; J_{10}(8) = 0.061; J_{11}(8) = 0.026.$$

• Criteriul de putere ( $C_p$ )

În urma calculelor rezultă că:

$$\sum_{k=-8}^8 J_k^2(8) = 0.959; \sum_{k=-9}^9 J_k^2(8) = 0.991 \stackrel{(2.76)}{\Rightarrow} N = 8 \stackrel{(2.78)}{\Rightarrow} \left( B_{MF} \Big|_{f_0=0.5 \text{ kHz}} \right) \Big|_{C_p} = 8 \text{ kHz}$$

• Criteriul de amplitudine ( $C_a$ )

$$J_k(8)_{\max} = 0.338$$

și cum

$$J_{11}(8) = 0.026 < 10\% J_k(8)_{\max} \Rightarrow N = 10 \stackrel{(2.78)}{\Rightarrow} \left( B_{MF} \Big|_{f_0=0.5 \text{ kHz}} \right) \Big|_{C_a} = 10 \text{ kHz}$$

b)  $f_0 = 1 \text{ kHz} \Rightarrow \beta = 4$

Valorile funcțiilor  $J_k(\beta) = J_k(4)$  sunt următoarele:

$$J_0(4) = 0.397; J_1(4) = 0.066; J_2(4) = 0.364; J_3(4) = 0.431;$$

$$J_4(4) = 0.281; J_5(4) = 0.132; J_6(4) = 0.049; J_7(4) = 0.015.$$

- Criteriul de putere (Cp)

În urma calculelor rezultă că:

$$\sum_{k=-4}^4 J_k^2(4) = 0.96; \quad \sum_{k=-5}^5 J_k^2(8) = 0.995 \xRightarrow{(2.76)} N = 4 \xRightarrow{(2.78)} \left( B_{MF} |_{f_0=1\text{kHz}} \right) \Big|_{Cp} = 8\text{kHz}$$

- Criteriul de amplitudine (Ca)

$$J_k(4)_{\max} = 0.431$$

și cum

$$J_7(4) = 0.015 < 10\% J_k(4)_{\max} \Rightarrow N = 6 \xRightarrow{(2.78)} \left( B_{MF} |_{f_0=1\text{kHz}} \right) \Big|_{Ca} = 12\text{kHz}$$

c)  $f_0 = 2\text{kHz} \Rightarrow \beta = 2$

Valorile funcțiilor  $J_k(\beta) = J_k(2)$  sunt următoarele:

$$J_0(2) = 0.224; \quad J_1(2) = 0.577; \quad J_2(2) = 0.353; \quad J_3(2) = 0.129; \quad J_4(2) = 0.034.$$

- Criteriul de putere (Cp)

În urma calculelor rezultă că:

$$\sum_{k=-2}^2 J_k^2(2) = 0.964; \quad \sum_{k=-3}^3 J_k^2(3) = 0.998 \xRightarrow{(2.76)} N = 2 \xRightarrow{(2.78)} \left( B_{MF} |_{f_0=2\text{kHz}} \right) \Big|_{Cp} = 8\text{kHz}$$

- Criteriul de amplitudine (Ca)

$$J_k(2)_{\max} = 0.577$$

și cum

$$J_4(2) = 0.034 < 10\% J_k(2)_{\max} \Rightarrow N = 3 \xRightarrow{(2.78)} \left( B_{MF} |_{f_0=2\text{kHz}} \right) \Big|_{Ca} = 12\text{kHz}$$

d)  $f_0 = 4\text{kHz} \Rightarrow \beta = 1$

Valorile funcțiilor  $J_k(\beta) = J_k(1)$  sunt următoarele:

$$J_0(1) = 0.765; \quad J_1(1) = 0.44; \quad J_2(1) = 0.115; \quad J_3(1) = 0.02.$$

- Criteriul de putere (Cp)

În urma calculelor rezultă că:

$$\sum_{k=-1}^1 J_k^2(2) = 0.973; \quad \sum_{k=-2}^2 J_k^2(3) = 0.999 \xRightarrow{(2.76)} N = 1 \xRightarrow{(2.78)} \left( B_{MF} |_{f_0=4\text{kHz}} \right) \Big|_{Cp} = 8\text{kHz}$$

- Criteriul de amplitudine (Ca)

$$J_k(1)_{\max} = 0.765$$

și cum

$$J_3(1) = 0.02 < 10\% J_k(1)_{\max} \Rightarrow N = 2 \xRightarrow{(2.78)} \left( B_{MF} |_{f_0=4\text{kHz}} \right) \Big|_{Ca} = 16\text{kHz}$$

În figura 2.30 este reprezentată banda efectivă a semnalului MF, calculată după cele două criterii (putere, respectiv amplitudine).

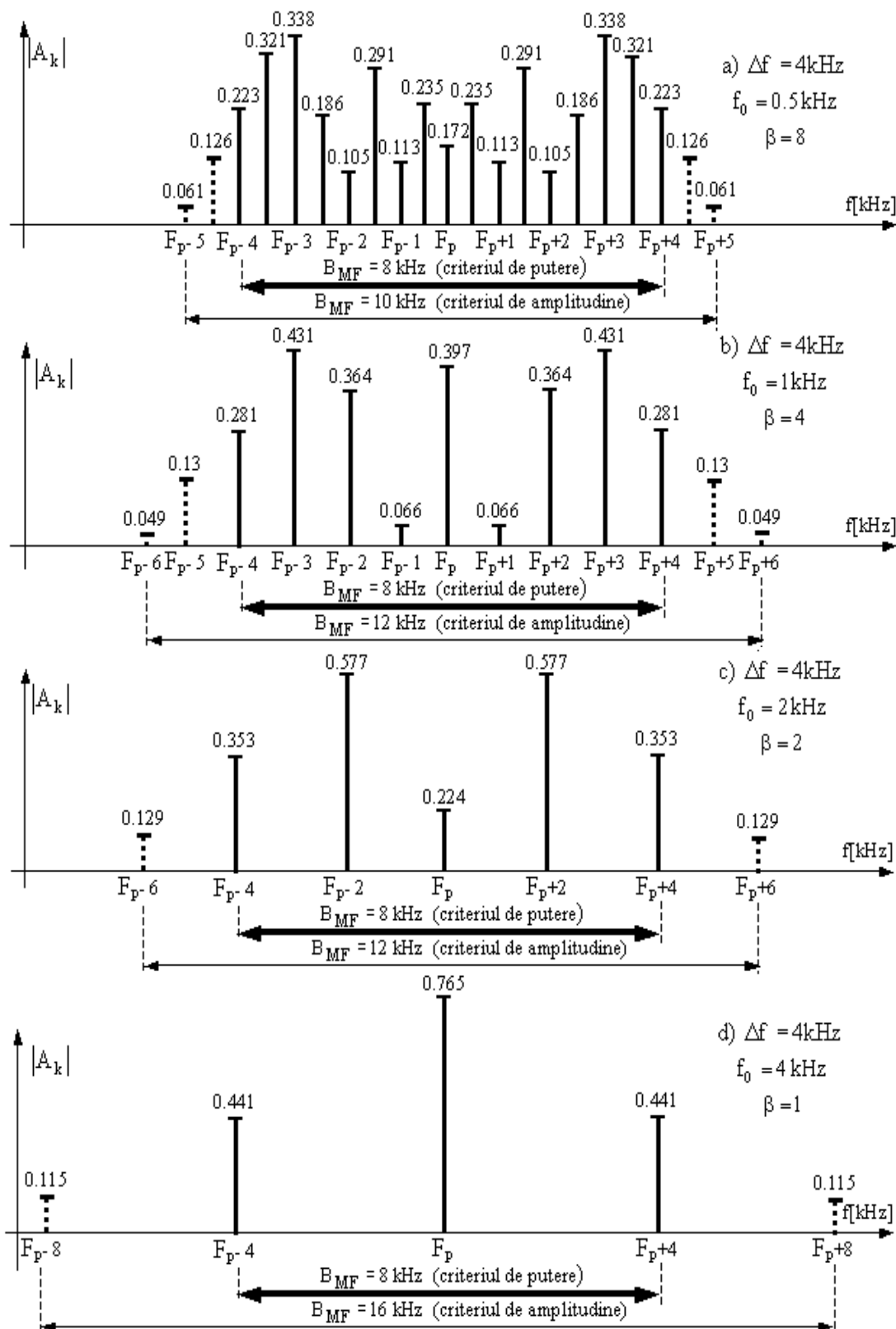


Fig. 2.30 Banda efectivă a semnalului MF calculată pentru aceeași deviație de frecvență,  $\Delta f = 4\text{kHz}$  și patru valori ale frecvenței modulatorului  $f_0 = 0.5\text{kHz}; 1\text{kHz}; 2\text{kHz}; 4\text{kHz}$ . Calculele au fost efectuate conform criteriului de putere, respectiv amplitudine.

## 2) Modulația în fază

Modulația în fază conduce la un semnal de tipul celui dat prin relația (2.63) și având un spectru de amplitudini ca cel reprezentat în figura 2.29.

Pentru a determina lărgimea de bandă se utilizează aceleași două criterii ca și în cazul studiului modulației în frecvență. Datorită faptului că valoarea deviației de fază, pentru toate cele patru frecvențe ale semnalului modulator, este constantă,  $\alpha = 1$ , valorile funcțiilor  $J_k(\alpha) = J_k(1)$  sunt și ele identice pentru cele patru cazuri:

$$J_0(1) = 0.765; J_1(1) = 0.44; J_2(1) = 0.115; J_3(1) = 0.02.$$

Conform criteriului de amplitudine:

$$J_k(1)_{\max} = 0.765$$

și cum

$$J_3(1) = 0.02 < 10\% J_k(1)_{\max} \Rightarrow N = 2.$$

Conform criteriului de putere:

$$\sum_{k=-1}^1 J_k^2(2) = 0.973; \sum_{k=-2}^2 J_k^2(3) = 0.999 \stackrel{(2.76)}{\Rightarrow} N = 1$$

Pentru a determina lărgimea de bandă se utilizează (2.78)  $B_{M\Phi} = 2N\omega_0$

a)  $f_0 = 0.5 \text{ kHz}$

- Criteriul de putere (Cp)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=0.5\text{kHz}} \right)_{Cp} = 1 \text{ kHz}$
- Criteriul de amplitudine (Ca)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=0.5\text{kHz}} \right)_{Ca} = 2 \text{ kHz}$

b)  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

- Criteriul de putere (Cp)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=1\text{kHz}} \right)_{Cp} = 2 \text{ kHz}$
- Criteriul de amplitudine (Ca)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=1\text{kHz}} \right)_{Ca} = 4 \text{ kHz}$

c)  $f_0 = 2 \text{ kHz}$

- Criteriul de putere (Cp)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=2\text{kHz}} \right)_{Cp} = 4 \text{ kHz}$
- Criteriul de amplitudine (Ca)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=2\text{kHz}} \right)_{Ca} = 8 \text{ kHz}$

d)  $f_0 = 4 \text{ kHz}$

- Criteriul de putere (Cp)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=4\text{kHz}} \right)_{Cp} = 8 \text{ kHz}$
- Criteriul de amplitudine (Ca)  $\left( B_{M\Phi} \Big|_{f_0=4\text{kHz}} \right)_{Ca} = 16 \text{ kHz}$

În figura 2.31 este reprezentată banda efectivă a semnalului MP, calculată după cele două criterii (putere, respectiv amplitudine).

Acest exemplu confirmă următoarele:

- În cazul calculului benzii efective utilizând criteriul de putere.
  - Banda de frecvență a semnalului MF nu depinde de frecvența semnalului modulator.
  - Banda de frecvență a semnalului MP depinde direct proporțional de frecvența semnalului modulator.

Determinarea numărului N de armonici ce sunt cuprinse în bandă este dificil (pentru aceasta se utilizează softuri matematice). Din acest motiv este recomandat să se utilizeze pentru calculul benzii expresiile  $B_{MF} = 2(\beta + 1)\omega_0$ ,  $B_{M\Phi} = 2(\alpha + 1)\omega_0$ .

➤ În cazul calculului benzii efective utilizând criteriul de amplitudine.

În cazul acelor aplicații în care este utilizat acest criteriu, se impune calculul valorilor funcțiilor  $J_k(\beta)$  (fie se utilizează softuri matematice, fie se apelează la valorile tabelate) pentru a determina numărul de armonici ce se situează în bandă. În acest caz pentru calcul benzii se aplică direct expresia  $B_{MF(M\Phi)} = 2N\omega_0$ .

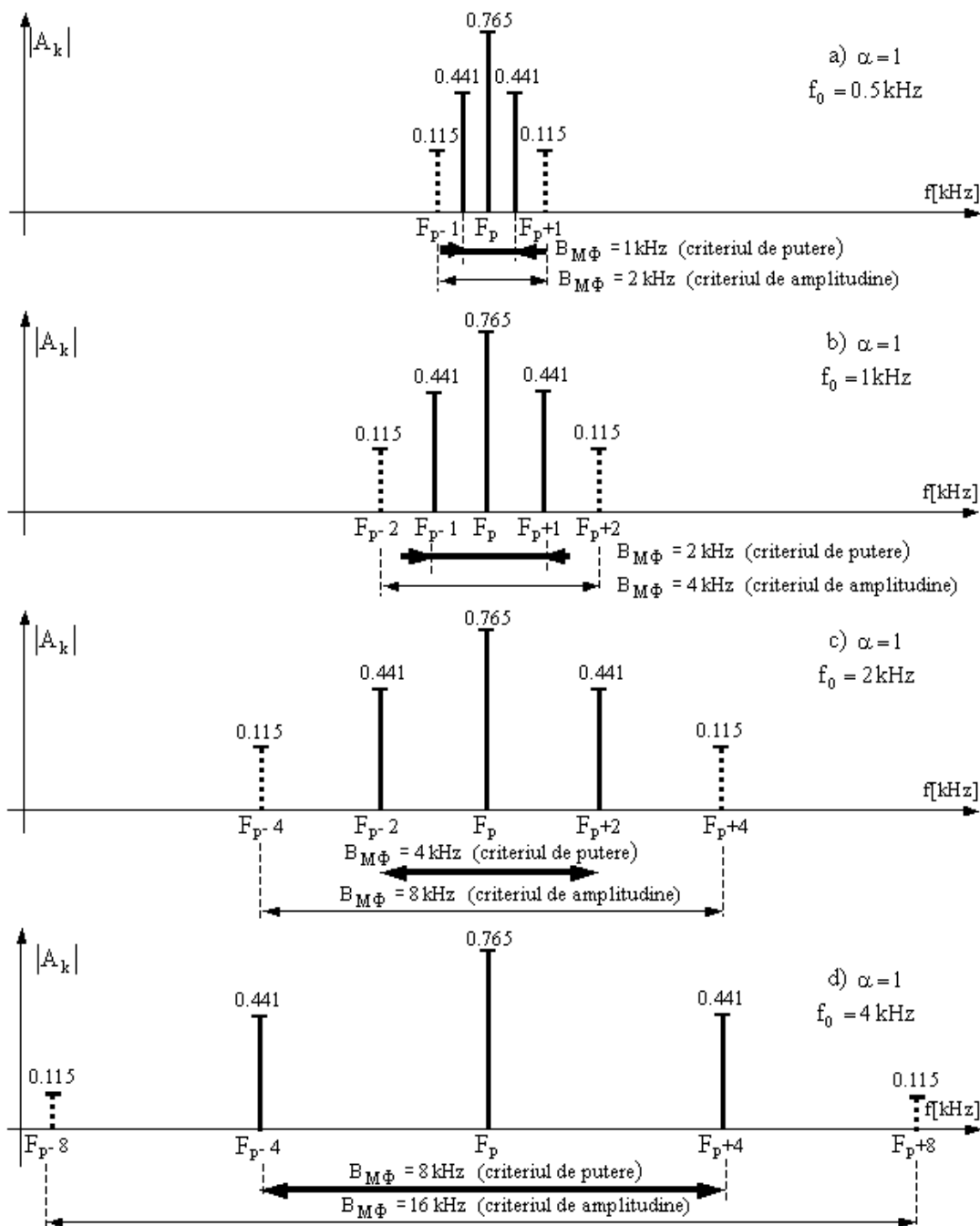


Fig. 2.31 Banda efectivă a semnalului MP calculată pentru aceeași deviație de fază (indice de modulație în fază) recvență,  $\alpha = 1$  și patru valori ale frecvenței modulatorului  $f_0 = 0.5$  kHz; 1 kHz; 2 kHz; 4 kHz .

Calculule au fost efectuate conform criteriului de putere, respectiv amplitudine.

**B. Independența de frecvența modulatorului a benzii semnalului MF precum și faptul că banda semnalului MP este direct proporțională cu frecvența modulatorului are o implicație asupra canalului pe care se transmit semnalele.**

Considerând un mesaj (semnal modulator) având spectrul localizat în intervalul  $[\omega_m, \omega_M]$ , apare următoarea diferență:

➤ La semnalul MF benzile de frecvență obținute în urma modulării sunt aceleași atât pentru componenta de frecvență inferioară  $\omega_m$ , cât și pentru componenta de frecvență superioară  $\omega_M$ .

➤ La semnalul MP, componenta de frecvență superioară va necesita pentru transmisie o bandă mai mare decât cea necesară pentru componenta de frecvență inferioară.

Deoarece lățimea de bandă a canalului de transmisie trebuie să fie egală cu banda ocupată în urma modulării mesajului, rezultă că banda canalului nu va fi utilizată eficient de către componentele semnalului modulator de frecvențe joase în cazul MP.

În figura 2.32 este prezentat modul de utilizare a canalului de transmisie în cazul celor două tipuri de modulație.

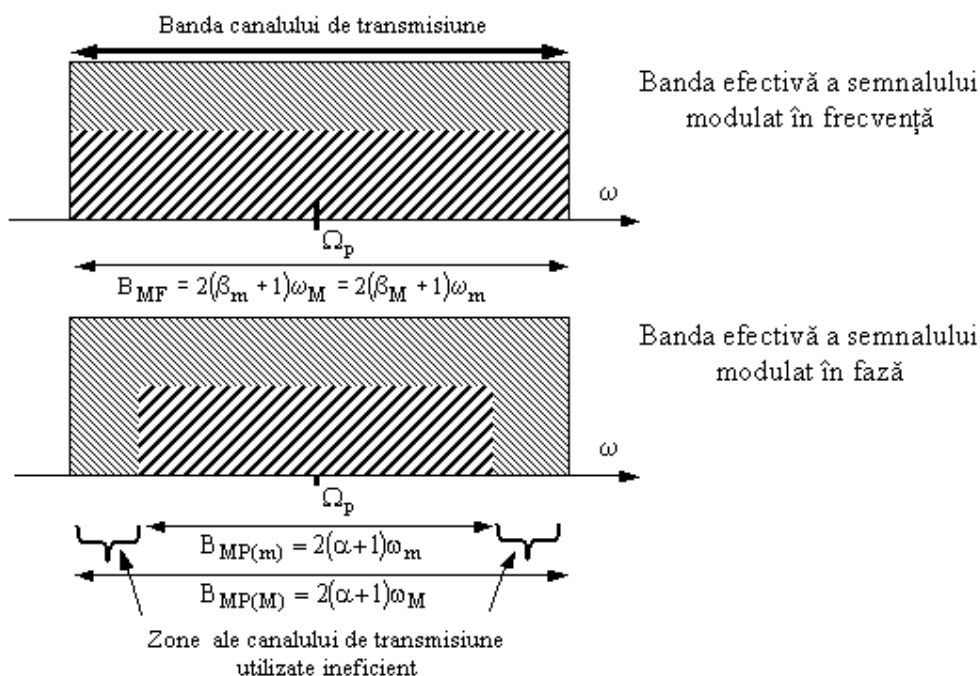


Fig. 2.32 Exemplificarea grafică a utilizării ineficiente a canalului de transmisie pentru cazul în care semnalul este modulat în fază.

Reprezentările grafice ale benzilor de frecvență din figura 2.32 suportă următoarele observații:

➤ Pentru a se putea vizualiza mai ușor benzile corespunzătoare celor două frecvențe limită  $\omega_m$  și  $\omega_M$ , amplitudinile spectrului corespunzător frecvenței inferioare s-au considerat mai mici decât amplitudinile spectrului corespunzător frecvenței superioare. Această reprezentare nu este obligatoriu a fi adevărată.

➤ În cazul modulației în frecvență s-a considerat că deviația în frecvență este constantă. Conform (2.59) rezultă că valorii frecvenței superioară  $\omega_M$  îi va corespunde o valoare minimă a indicelui de modulație în frecvență  $\beta_m$  și invers.



**C. Scriind pentru comparație relațiile pentru frecvența și faza instantanee se obține:**

$$\begin{cases} \text{MF: } \Omega_i(t) = \Omega_p + kx_0(t); \Phi(t) = \Omega_p t + k \int_t x_0(t) dt \\ \text{MP: } \Omega_i(t) = \Omega_p + k \frac{x_0(t)}{dt}; \Phi(t) = \Omega_p t + kx_0(t) \end{cases} \quad (2.91)$$

Se pot face următoarele observații:

➤ Modulația în frecvență este o modulație de fază la care faza nu variază direct proporțional cu semnalul modulator ci cu integrala semnalului modulator.

➤ Modulația în fază este o modulație de frecvență la care frecvența instantanee variază liniar cu derivata semnalului modulator și nu cu semnalul modulator.

Aceste două observații au valoare practică, deoarece arată modul în care se poate transforma un modulator MF într-unul MP și invers, prin utilizarea unui circuit de derivare, respectiv de integrare. Într-adevăr dacă se integrează inițial semnalul modulator și apoi se modulează purtătorul rezultă semnalul modulat în frecvență. Similar, diferențiind modulatorul și apoi utilizându-l la modulația în frecvență a purtătorului se obține semnalul modulat în fază.

### 2.2.8. Comparații între MA, MF și MP (MΦ)

În tabelul 2.3 se prezintă sintetic o comparație care identifică asemănările și deosebirile între aceste trei tipuri de modulație și domeniile de utilizare.

Diferențele dintre cele trei tipuri de modulație din punct de vedere al canalului de transmisiune ce suportă semnalul, pot fi puse în evidență prin intermediul teoremei Hartley-Shannon. Această teoremă este exprimată prin relația:

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P_s}{P_z} \right) [\text{bit/s}] \quad (2.92)$$

unde:

C - capacitatea unui canal de transmisiune și reprezintă cantitatea maximă de informație ce se poate transmite pe un canal în unitatea de timp;

B – lățimea de bandă a canalului;

$\frac{P_s}{P_z}$  - raportul dintre puterea medie a semnalului util și puterea medie a zgomotului

(perturbațiilor).

Din analiza relației (2.92) se observă că se poate obține aceeași cantitate de informație fie cu o bandă îngustă și un raport de puteri  $P_s/P_z$  mare, fie invers (bandă lată și un raport de puteri  $P_s/P_z$  mic).

➤ Semnalele modulate în frecvență sau fază au o bandă efectivă mai mare decât în cazul semnalelor modulate în amplitudine.

➤ Semnalele modulate în frecvență sau fază au o mai bună protecție împotriva contra perturbațiilor (raportul  $P_s/P_z$  este mai mare) decât în cazul semnalelor modulate în amplitudine. Această observație poate fi explicată fizic astfel: zgomotul are variații în amplitudine, nu și în frecvență; în aceste condiții rezultă că sistemele care detectează numai variațiile în frecvență, nu și în amplitudine, sunt mai bine protejate împotriva zgomotului.

Aceste două observații coroborate cu (2.92) duc la concluzia că mărimea C (capacitatea unui canal de transmisiune) are valoare mai mare în cazul în care semnalele sunt modulate în frecvență sau fază.

Dezavantajul acestor tipuri de modulație (MF și MP) în comparație cu MA poate apărea în momentul în care lărgimea canalului de comunicație este mai mică decât banda efectivă a semnalelor astfel modulate.

Relația Hartley-Shannon arată că emițătoarele MF, MP pot fi de putere mult mai mică decât cele MA, cantitatea maximă de informație ce se poate transmite pe un canal în unitatea de timp nescăzând, deoarece crește lărgimea de bandă a semnalului astfel modulat.

Tab.2.3 Comparație între metodele de modulație cu purtător sinusoidal

| Tipul de modulație                          | MA  | MF  | MP(MΦ)  |
|---|---|---|---|
| Expresia analitică a semnalului             | $[A_p + k a_0 \cos(\omega_0 t)] \cos(\Omega_p t)$   | $A_p \cos(\Omega_p t + \beta \sin \omega_0 t)$  | $A_p \cos(\Omega_p t + \alpha \cos \omega_0 t)$   |
| Localizarea informației în semnalul modulat | informația cu privire la semnalul modulator este dată de amplitudinea semnalului modulat în amplitudine | informația cu privire la semnalul modulator este dată de trecerile prin zero ale semnalului modulat în frecvență  | informația cu privire la semnalul modulator este dată de trecerile prin zero ale semnalului modulat în fază   |
| Deviația de amplitudine                     | $\Delta a = a_0$  | -   | -   |
| Deviația de frecvență                       | -   | $\Delta \Omega = k a_0$   | $\Delta \Omega = k a_0 \omega_0$  |
| Deviația de fază                            | -   | $\Delta \Phi = \frac{k a_0}{\omega_0} = \frac{\Delta \Omega}{\omega_0}$   | $\Delta \Phi = k a_0$   |
| Indice de modulație                         | $m = \frac{k a_0}{A_p}$   | $\beta = \frac{\Delta \Omega}{\omega_0}$  | $\alpha = \Delta \Phi$  |
| Banda efectivă                              | $2 \omega_0$  | $2 N \omega_0 \approx \begin{cases} 2 \omega_0 & \beta \text{ mic} \\ 2 \beta \omega_0 & \beta \text{ mare} \end{cases}$  | $2 N \omega_0 \approx \begin{cases} 2 \omega_0 & \alpha \text{ mic} \\ 2 \alpha \omega_0 & \alpha \text{ mare} \end{cases}$   |
| Protecția la zgomote                        | slabă   | bună, la $\beta$ mare   | bună, la $\alpha$ mare  |
| Distribuția puterii                         | maximă la frecvența centrală $\Omega_p$   | în toată banda MF   | în toată banda MP   |
| Utilizări importante                        | sisteme de multiplexare în frecvență  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• cu <math>\beta</math> mare în radiocomunicații;</li> <li>• cu <math>\beta</math> mic în transmisiuni de date și telegrafice;</li> <li>• în aparatură de măsură și control</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• cu <math>\alpha</math> mare în radiocomunicații și radiolocație;</li> <li>• cu <math>\alpha</math> mic în transmisiuni de date și telegrafice;</li> <li>• în aparatură de măsură și control</li> </ul> |

## 2.3. Eșantionarea semnalelor

### 2.3.1. Teorema eșantionării

După cum s-a precizat în paragraful 1.1, un semnal este complet determinat fie prin reprezentarea sa în domeniul timp (formă de undă), fie prin reprezentare în frecvență (spectru).

Pe baza acestui concept se realizează transmiterea simultană a mai multor semnale pe același canal de comunicații.

Un număr de  $N$  semnale pot fi transmise simultan pe același canal de comunicație dacă pot fi separate fie în domeniul frecvență, fie în domeniul timp. Conform acestor precizări, semnalele ocupă fie benzi diferite de frecvență, fie intervale diferite de timp.

Transmiterea simultană a mai multor semnale pe un același canal fizic, prin separarea lor în domeniul frecvență se numește multiplexare în frecvență iar transmiterea simultană a mai multor semnale prin separarea lor în domeniul timp se numește multiplexare în timp.

În cadrul cursului de față s-a arătat că un semnal finit în timp este infinit în frecvență și invers (spectrul unui semnal periodic, ce este teoretic de durată infinită, are un spectru finit, iar spectrul unui impuls, semnal cu durată finită, are un spectru teoretic infinit).

În consecință:

- la multiplexarea în frecvență, semnalele ce se transmit simultan, au spectre de frecvențe diferite și finite, dar durata lor fiind infinită, apar interferențe între ele în domeniul timp.

- la multiplexarea în timp, se transmit impulsuri la momente diferite, dar având spectre teoretic infinite, apar interferențe între ele în domeniul frecvență.

Separarea semnalelor la recepție se face pe baza identității păstrate în domeniul frecvență, respectiv în domeniul timp.

Multiplexarea în frecvență se poate realiza pe baza modulației semnalelor, tehnică ce permite prin translatarea spectrelor separarea lor în domeniul frecvență.

Multiplexarea în timp se bazează pe eșantionarea semnalelor și transmiterea acestora la momente diferite de timp, astfel încât eșantioanele semnalelor să nu se suprapună.

Eșantionarea este o metodă de reprezentare a semnalelor analogice printr-o succesiune de valori (eșantioane), considerate la momente discrete de timp.

Pentru a ilustra eșantionarea se utilizează reprezentările grafice din figura 2.33.

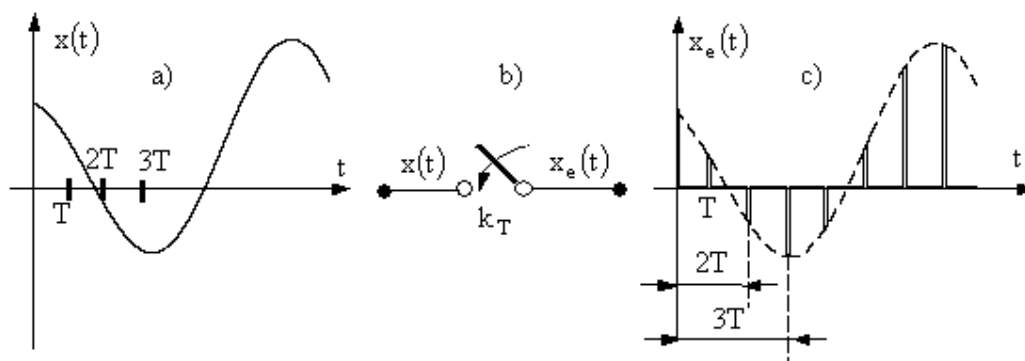


Fig. 2.33 Ilustrarea eșantionării

Semnalul analogic  $x(t)$  - figura 2.33 a) se aplică unui comutator  $k_T$  - figura 2.33b).

Comutatorul se deschide la fiecare moment  $t = nT, n \in \mathbb{N}$ , revenind în poziția “deschis” după un interval de timp infinit de mic.

La ieșirea din comutator se obține semnalul eșantionat  $x_e(t) = \{x(nT)\}$ , reprezentat în figura 2.33c). Valorile  $\{x(nT)\}$  reprezintă eșantioanele semnalului  $x(t)$ .

Observație

- Durata în care comutatorul  $k_T$  este închis este de durată finită  $\Delta t$  foarte mică.

Idealizarea comportării comutatorului ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) implică idealizarea semnalului eșantionat (durata eșantioanelor tinde spre zero). Această idealizare permite elaborarea unor modele de studiu simple și generale, care pot fi adaptate ulterior la realitatea fizică. Eșantionarea prezentată în figura 2.33 este periodică, deoarece comutatorul  $k_T$  este acționat periodic

Se definesc:

- Perioada de eșantionare -  $T$ ;
- Pulsăția de eșantionare -  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Semnalul eșantionat este un semnal discret în timp. Acest semnal poate fi reprezentat prin două variante:

- ca o funcție de variabilă  $nT$ ,  $x_e(t) = f\{x(nT)\}$ ;
- ca o funcție de variabilă numerică (dacă se raportează variabila  $t$  la perioada  $T$ )  $x_e(n) = f\{x(n)\}$

Semnalul (funcția) eșantionat se poate reprezenta matematic cu ajutorul funcției delta periodic  $\delta_T(t)$ .

Funcția delta periodic este o succesiune de impulsuri unitate (impulsuri Dirac) fiind prezentată grafic în figura 2.34

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.93)$$

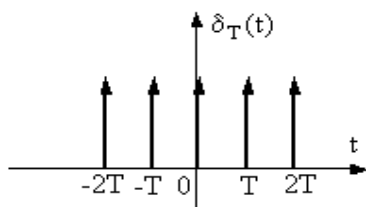


Fig. 2.34 Funcția delta periodic

În concluzie un semnal eșantionat are următoarea expresie matematică:

$$x_e(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (2.94)$$

Modalitatea de transmitere a eșantioanelor unor semnale la momente diferite de timp, astfel încât acestea să nu se suprapună (principiului multiplexării în timp) este ilustrată în figura 2.35.

Identitatea fiecărui semnal este dată de duratele  $\tau_i$  față de anumite momente de referință marcate în figura 2.35 prin impulsuri de sincronizare. La recepție, eșantioanele diferitelor semnale se separă prin detecție sincronă.

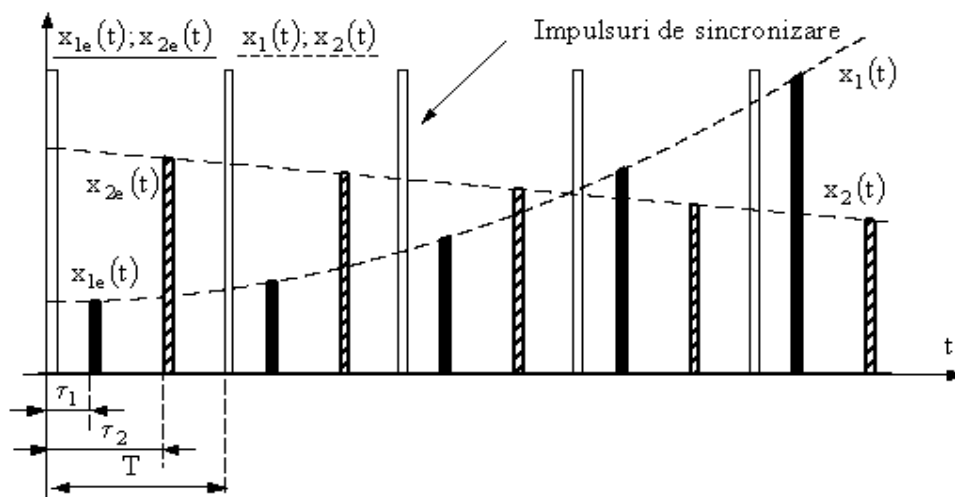


Fig. 2.35 Ilustrarea principiului multiplexării în timp

Din cele prezentate în figura 2.35, rezultă că multiplexarea în timp este realizabilă în principiu. Demonstrația faptului că multiplexarea în timp se poate realiza practic, constă în a arăta că semnalul ce se eșantionează poate fi reconstituit numai din cunoașterea acestor eșantioane.

**În concluzie trebuie arătat că semnalul este unic determinat de eșantioanele sale.**

**Teorema eșantionării: Orice semnal  $x(t)$ , ce are o bandă de frecvență limitat (banda nu este infinită), este complet definit (univoc determinat) prin eșantioanele sale  $\{x(nT)\}$ , dacă perioada de eșantionare,  $T$ , îndeplinește condiția:**

$$T \leq \frac{1}{2f_M} \tag{2.95}$$

unde  $f_M$  este frecvența maximă a spectrului semnalului.

Observație:

- Teorema eșantionării poartă numele de teorema lui Shannon;
- Condiția (2.95) de determinare univocă a unui semnal prin eșantioanele sale se numește condiția lui Nyquist.

Demonstrarea teoremei lui Shannon se bazează pe posibilitatea de a reconstitui spectrul  $X(\omega)$  al semnalului neeșantionat  $x(t)$ , din spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat  $x_e(t)$ .

Demonstrație

Primul pas al demonstrației este de a calcula transformata Fourier a semnalului eșantionat.

Conform (2.94)

$$x_e(t) = x(t)\delta_T(t)$$

și în consecință

$$F\{x_e(t)\} = F\{x(t)\delta_T(t)\}$$

Din teorema integralei de convoluție în frecvență se obține că:

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)\} = 2\pi x_1(t)x_2(t) \Rightarrow F\{F^{-1}\{X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)\}\} = F\{2\pi x_1(t)x_2(t)\}$$

și în consecință

$$F\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} [X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)] \tag{2.96}$$

Aplicând (2.96) la (2.94) rezultă că:

$$F\{x_e(t)\} = X_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F\{x(t)\} \otimes F\{\delta_T(t)\}] = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) \otimes F\{\delta_T(t)\}] \quad (2.97)$$

Pentru a calcula transformata Fourier a funcției delta periodic se va scrie această funcție sub forma unei serii Fourier (S.F.E.).

Conform (1.42)

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\Omega t}$$

Calculul coeficienților se face aplicând (1.46).

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt \stackrel{(1.85)}{=} \frac{1}{T}$$

Rezultă că:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t} \quad (2.98)$$

și deci

$$F\{\delta_T(t)\} = F\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{e^{jn\Omega t}\}$$

O metodă de a calcula transformata Fourier a impulsului  $e^{jn\Omega t}$  este de a utiliza rezultatele obținute a calculul transformatelor Fourier pentru impulsurile sinusoidal/cosinusoidal.

$$\begin{aligned} F\{e^{jn\Omega t}\} &\stackrel{(1.101)}{=} F\{\cos n\Omega t + j \sin n\Omega t\} = F\{\cos n\Omega t\} + jF\{\sin n\Omega t\} = \\ &\stackrel{(1.114);(1.117)}{=} [\pi\delta(\omega - n\Omega) + \pi\delta(\omega + n\Omega)] + j[j\pi\delta(\omega + n\Omega) - j\pi\delta(\omega - n\Omega)] \end{aligned}$$

În final se obține că:

$$F\{e^{jn\Omega t}\} = 2\pi\delta(\omega - n\Omega) \quad (2.99)$$

și în consecință

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \quad (2.100)$$

Aplicând (2.100) la (2.97) se obține că:

$$X_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ X(\omega) \otimes \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \right] = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X(\omega) \otimes \delta(\omega - n\Omega)]$$

de unde rezultă că:

$$X_e(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X(\omega - n\Omega)] \quad (2.101)$$

Relația (2.101) pune în evidență un lucru deosebit de important: **spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat  $x_e(t)$ , este o repetare periodică a spectrul  $X(\omega)$  al semnalului  $x(t)$  la multiplii frecvenței de eșantionare  $\Omega$ .**

O ilustrare grafică a teoremei de eșantionare este prezentată în figura 2.36.

În urma analizei acestor reprezentări grafice se pot face următoarele observații:

- Forma de undă a semnalului  $x(t)$  este prezentată în figura 2.36 a).
- Spectrul  $X(\omega)$  al semnalului  $x(t)$  este reprezentat în figura 2.36 b). Se observă că spectrul acestui semnal este limitat de o valoare maximă a frecvenței notată  $f_M(\omega_M)$ ;
- Forma de undă a funcției delta periodic  $\delta_T(t)$  este prezentată în figura 2.36 c). Pe grafic este pusă în evidență perioada de eșantionare  $T$ ;
- Spectrul  $F\{\delta_T(t)\}$  al funcției delta periodic  $\delta_T(t)$  este prezentată în figura 2.36 d).

Se observă că acest spectru este o sumă de componente cu amplitudinea egală cu frecvența de eșantionare  $\Omega$ . Aceste componente sunt plasate la frecvențe egale cu multiplii frecvenței de eșantionare;

- Forma de undă a semnalului eșantionat  $x_e(t)$  este prezentată în figura 2.36 e).

Spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat, obținut conform (2.101), este prezentat în următoarele trei grafice. Aceste trei reprezentări ale spectrului semnalului eșantionat sunt realizate pentru valori diferite ale frecvenței maxime  $f_M(\omega_M)$  ale semnalului  $x(t)$ . În toate aceste trei cazuri se consideră frecvența de eșantionare  $\Omega$  ca fiind constantă.

- În figura 2.36 f) este reprezentat spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat în cazul în care este respectată condiția lui Nyquist;

- În figura 2.36 g) este reprezentat spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat în cazul în care condiția lui Nyquist este la limită  $T = \frac{1}{2f_M}$ ;

- În figura 2.36 h) este reprezentat spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat în cazul în care nu este respectată condiția lui Nyquist. În acest caz spectrul  $X(\omega)$  nu se poate reconstitui din spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat, deoarece funcțiile translate se suprapun rezultând o funcție deformată în raport cu  $X(\omega)$ .

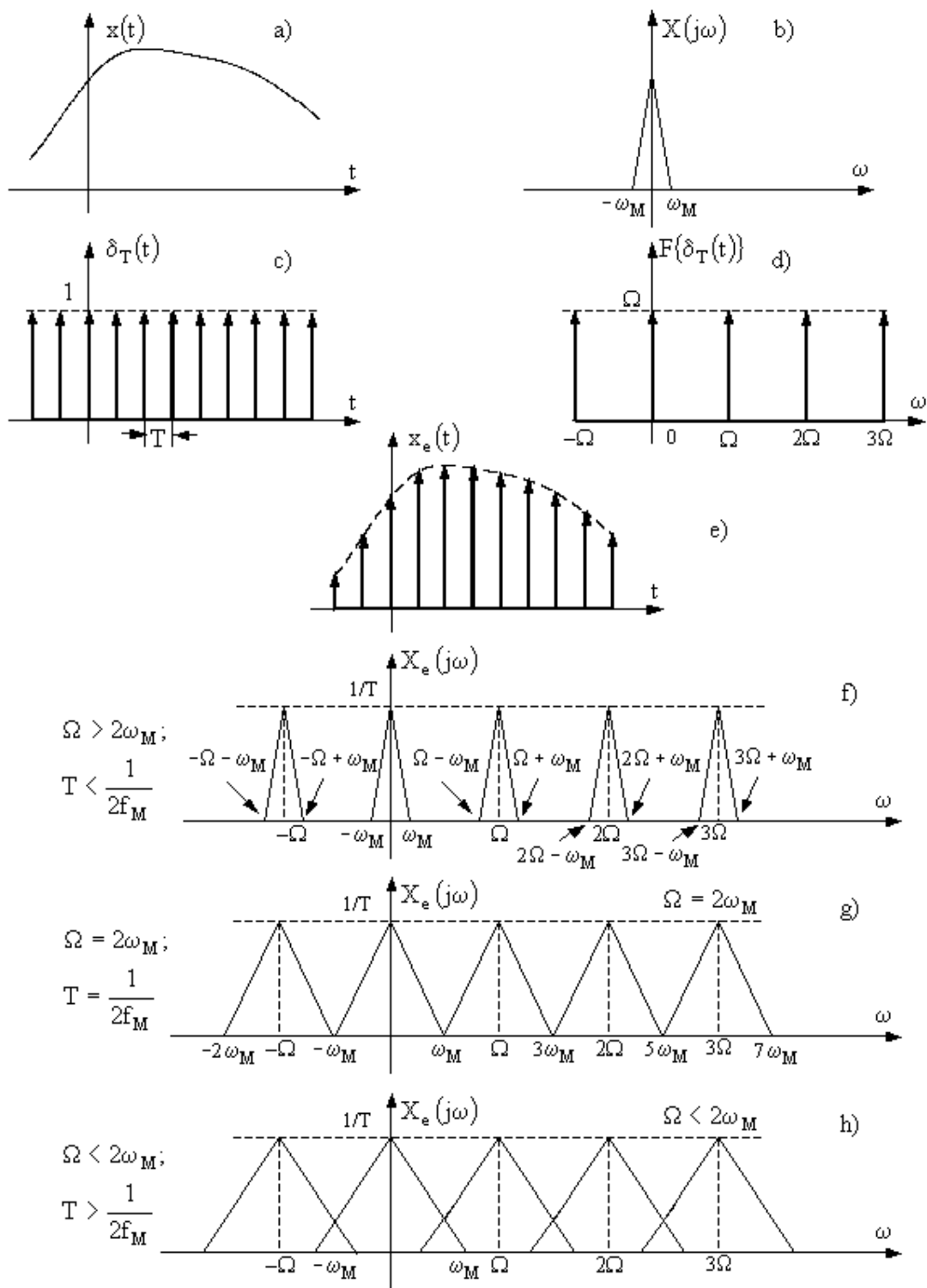


Fig. 2.36 Eșantionarea ideală a unui semnal cu bandă limitată;

- a) forma de undă a semnalului  $x(t)$ ; b) spectrul limitat  $X(\omega)$  al semnalului  $x(t)$ ; c) forma de undă a funcției delta periodic  $\delta_T(t)$ ; d) spectrul  $F\{\delta_T(t)\}$  al funcției delta periodic  $\delta_T(t)$ ; e) forma de undă a semnalului eșantionat  $x_e(t)$ ; f) spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat în cazul în care se respectă condiția lui Nyquist; g) spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat în cazul în care condiția lui Nyquist este la limită; h) spectrul  $X_e(\omega)$  al semnalului eșantionat în cazul în care nu se respectă condiția lui Nyquist;



### 2.3.2. Reconstituirea semnalului $x(t)$ din eșantioanele sale

Reconstituirea semnalului  $x(t)$  se realizează prin filtrarea semnalului eșantionat. Pentru această operație se folosește un FTJ, ce are frecvența de tăiere egală cu frecvența maximă  $f_M(\omega_M)$  a semnalului  $x(t)$ ;

Caracteristica de frecvență, ce se mai numește în literatură și funcție de filtrare, notată  $H(\omega)$ , a unui FTJ ideal are următoarea expresie matematică:

$$H(\omega) = \begin{cases} T = \frac{1}{2f_M} = \frac{\pi}{\omega_M} & |\omega| < \omega_M \\ 0 & |\omega| > \omega_M \end{cases} \quad (2.102)$$

Transformata Fourier inversă a funcției de filtrare, valoare ce va fi folosită în demonstrațiile următoare, are expresia:

$$\begin{aligned} F^{-1}\{H(\omega)\} = h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2j\omega t} \left( e^{j\omega t} \right)_{-\omega_M}^{\omega_M} \quad (1.101) \\ &= \frac{e^{j\omega_M t} - e^{-j\omega_M t}}{2j\omega t} \stackrel{(1.101)}{=} \frac{2j\sin(\omega_M t)}{2j\omega t} = \text{sinc}(\omega_M t) \end{aligned}$$

Deci

$$h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = \text{sinc}(\omega_M t) \quad (2.103)$$

Reprezentările grafice ale funcției de filtrare  $H(\omega)$  și a transformatei sale Fourier inverse sunt prezentate în figura 2.37.

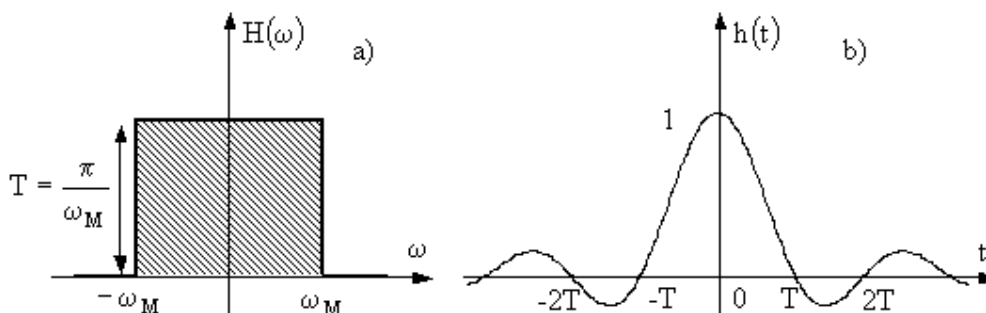


Fig. 2.37 a) Funcția de filtrare  $H(\omega)$  b) Transformata Fourier inversă  $h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\}$  a funcției de filtrare

Dacă din punct de vedere fizic reconstituirea semnalului  $x(t)$  se realizează prin filtrarea semnalului eșantionat, matematic, recuperarea funcției  $X(\omega)$  din  $X_e(\omega)$  este posibilă prin înmulțirea funcției  $X_e(\omega)$  cu  $H(\omega)$ , adică:

$$X(\omega) = X_e(\omega) \cdot H(\omega) \quad (2.104)$$

Conform teoremei integralei de convoluție în timp (1.120), rezultă că:

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = F^{-1}\{X_e(\omega)\} \otimes F^{-1}\{H(\omega)\} \stackrel{(2.103)}{\Rightarrow} x(t) = x_e(t) \otimes h(t)$$

Ținând cont de modalitate de scriere a unui semnal eșantionat, (2.94) și inversând ordinea integrare-însuare rezultă că:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \otimes h(t) \quad (2.105)$$

Considerând expresia (2.103) a transformatei Fourier inversă a funcției de filtrare, rezultă că:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \otimes \text{sinc}(\omega_M t) \quad (2.106)$$

iar din proprietatea (1.130), convoluția unei funcții cu  $\delta(t)$ , se obține în final:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}[\omega_M(t - nT)] \quad (2.107)$$

Expresia (2.107) se poate scrie compact astfel:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_n(t) \quad (2.108)$$

unde s-a notat:

$$h_n(t) = \text{sinc}[\omega_M(t - nT)] = h(t - nT) \quad (2.109)$$

Ilustrarea grafică a procesului de reconstituire a semnalului  $x(t)$  prin extrapolare în timp este prezentată în figura 2.38.

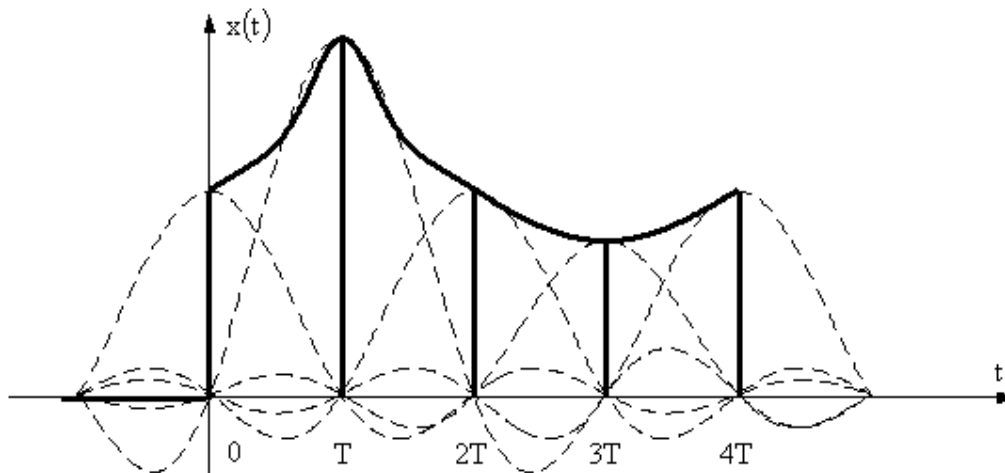


Fig. 2.38 Reconstituirea semnalului  $x(t)$  prin extrapolare în timp din funcții eșantion

Concluzie:

➤ Relația (2.107) exprimă modul de reconstituire în domeniul timp a semnalului  $x(t)$  din eșantioanele sale. Pentru aceasta se procedează în modul următor:

➤ Fiecare funcție de tipul (2.109)  $h_n(t) = \text{sinc}[\omega_M(t - nT)]$ , ce este centrată la  $nT$ , se ponderează cu valoarea funcției  $x(nT)$ .

➤ Se realizează însumarea tuturor funcțiilor  $h_n(t)$  astfel ponderate.

➤ Ponderea are efect doar asupra funcției  $h_n(t) = \text{sinc}[\omega_M(t - nT)]$  centrate la momentul  $nT$ , celelalte funcții (ce se însumează) trecând prin zero la momentul respectiv.

## 2.4. Modulație cu purtător în impulsuri

În sistemele clasice de transmisiuni se utilizează modulația cu purtător sinusoidal, tratată în capitolul 2.2. Acest procedeu stă la baza transmisiunilor cu multiplicare în frecvență. În sistemele moderne se utilizează modulația cu purtător în impulsuri, care permite diviziunea căilor în timp, multiplicarea în timp, ceea ce permite utilizarea intensivă a circuitelor integrate.

Modulația cu purtător în impulsuri utilizează ca semnal purtător o succesiune de impulsuri periodice prezentate în figura 2.39.

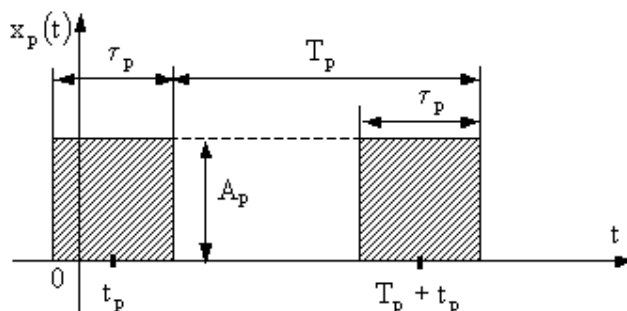


Fig.2.39 Purtător în impulsuri

Parametrii semnalului purtător  $x_p(t)$  sunt următorii (vezi paragraful 1.2.1.)

- $A_p$  amplitudinea semnalului;
- $T_p$  perioada semnalului;

unde  $F_p = \frac{1}{T_p} = \frac{\Omega_p}{2\pi}$ ;

- $t_p$  poziția impulsurilor pe axa timpului;
- $\tau_p$  durata impulsului;

Prin modificarea unuia din acești parametri proporțional cu semnalul modulator  $x_0(t)$  se obțin următoarele tipuri de modulație a impulsurilor:

- Modulația impulsurilor în amplitudine (M.I.A.);
- Modulația impulsurilor în frecvență (M.I.F.);
- Modulația impulsurilor în poziție (M.I.P.);
- Modulația impulsurilor în durată sau lățime (M.I.D. sau M.I.L.);

Observație:

➤ Modulația impulsurilor în poziție (M.I.P.) este de fapt o modulație de fază M.I.Φ., deoarece modificarea poziției  $t_p$ , a impulsurilor pe axa timpului afectează faza inițială a semnalului purtător.

➤ Modulația impulsurilor în frecvență (M.I.F.) afectează frecvența instantanee a semnalului purtător, ceea ce implică o modificare corespunzătoare a fazei instantanee. În consecință M.I.F. presupune implicit și o M.I.Φ.

➤ Din acest motiv se vor trata M.I.F. și M.I.Φ. ca o modulație a impulsurilor în poziție M.I.P., specificând de fiecare dată dacă modulația poziției se face prin intermediul fazei inițiale sau a frecvenței instantanee.

➤ În consecință, tipurile de modulație a impulsurilor studiate sunt: M.I.A., M.I.P. și M.I.D.

### 2.4.1. Modulația impulsurilor în amplitudine M.I.A.

Modulația în amplitudine a unui purtător în impulsuri  $x_p(t)$  cu un semnal modulator sinusoidal  $x_0(t)$  este reprezentată în figura 2.40.

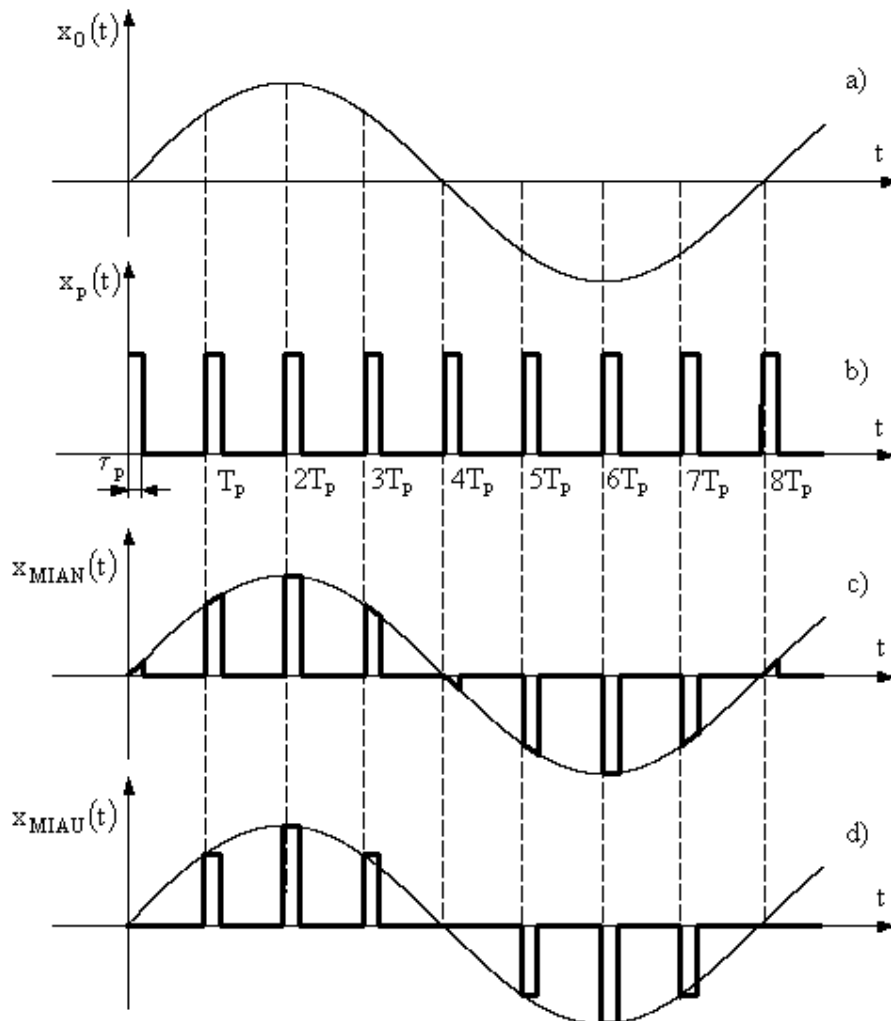


Fig.2.40 Modulația impulsurilor în amplitudine

- a) Semnalului modulator; b) Semnalului purtător; c) Semnalul modulat obținut prin M.I.A. naturală; d) Semnalul modulat obținut prin M.I.A. uniformă.

Se observă că MIA este de fapt o eșantionare a semnalului modulator  $x_0(t)$  cu purtătorul în impulsuri  $x_p(t)$ .

Din punct de vedere al modalității de realizare a eșantionării semnalului modulator se deosebesc două tipuri de MIA:

#### A. Modulația naturală a impulsurilor în amplitudine

În acest caz modulația se realizează efectuând produsul semnalelor  $x_0(t)$  și  $x_p(t)$ , rezultând că:

$$x_{MIAN}(t) = x_0(t) \cdot x_p(t) \quad (2.110)$$

Deosebirea de eșantionarea semnalelor (paragraful 2.3.) cu funcția delta periodic,  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  numită și eșantionare instantanee sau ideală, constă în aceea că la MIAN purtătorul este format de o succesiune de impulsuri de amplitudine  $A_p$ , de durată finită  $\tau_p$  și de perioadă  $T_p$ .

Forma de undă a semnalului MIAN este prezentată în figura 2.40.c).

Se observă că amplitudinile impulsurilor rezultate în urma modulației naturale urmăresc variația instantanee a semnalului modulator  $x_0(t)$ .

Principiul generării unui semnal MIAN poate fi urmărit în figura 2.41.

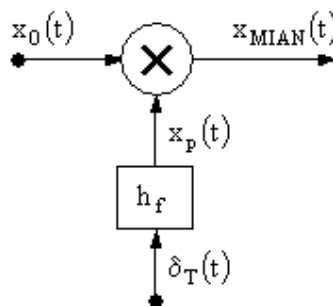


Fig.2.41 Principiul generării semnalelor MIAN

Semnalul purtător se obține aplicând funcția delta periodic,  $\delta_T(t)$  unui circuit notat  $h_f$ . Acest circuit răspunde la fiecare impuls  $\delta(t)$  aplicat la intrare printr-un impuls dreptunghiular  $h_f(t)$  de durată  $\tau_p$ , reprezentat în figura 2.42.a).

Răspunsul în frecvență al circuitului  $h_f$  este prezentat în figura 2.42.b).

În acest caz, semnalul purtător  $x_p(t)$  se poate scrie:

$$x_p(t) = \delta_T(t) \otimes h_f(t) \stackrel{(2.93)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \otimes h_f(t) \stackrel{(1.103)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_f(t - nT)$$

expresie ce corespunde reprezentării grafice din figura 2.40.b).

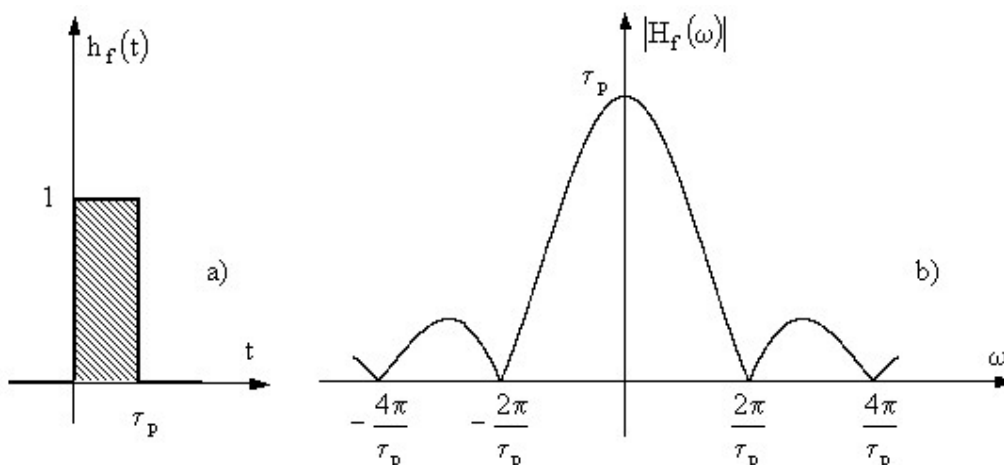


Fig.2.42 Răspunsul în timp a), respectiv frecvență b) a circuitului  $h_f$  la aplicarea impulsului  $\delta(t)$

**Analiza spectrală a semnalului M.I.A.N.**

Conform teoremei integralei de convoluție în frecvență, expresia  $X_{MIAN}(\omega)$  se calculează astfel:

$$X_{MIAN}(\omega) = F\{X_{MIAN}(t)\} = F\{x_0(t) \cdot x_p(t)\} \stackrel{(1.126)}{=} \frac{1}{2\pi} [X_0(\omega) \otimes X_p(\omega)] \quad (2.111)$$

Se presupune că spectrul semnalului modulator este limitat, adică:

$$X_0(\omega) = 0 \quad \text{pt } |\omega| > \omega_M$$

Această condiție este îndeplinită printr-o filtrare trece-jos a semnalului modulator.

Pentru a calcula funcția de densitate spectrală a semnalului purtător  $X_p(\omega)$ , inițial trebuie determinată expresia seriei Fourier exponențiale corespunzătoare semnalului.

$$x_p(t) = A_p \frac{\tau_p}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left( \frac{n\Omega_p \tau_p}{2} \right) e^{jn\Omega_p \left( t - \frac{\tau_p}{2} \right)} \quad (2.112)$$

Transformata Fourier a semnalului purtător devine:

$$X_p(\omega) = A_p \frac{\tau_p}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_p \frac{\tau_p}{2}} \text{sinc} \left( \frac{n\Omega_p \tau_p}{2} \right) F\{e^{jn\Omega_p t}\}$$

Conform (2.99)

$$F\{e^{jn\Omega_p t}\} = 2\pi \delta(\omega - n\Omega_p)$$

În concluzie:

$$X_p(\omega) = A_p \frac{2\pi\tau_p}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{-jn\Omega_p \frac{\tau_p}{2}} \text{sinc} \left( \frac{n\Omega_p \tau_p}{2} \right) \right] \delta(\omega - n\Omega_p) \quad (2.113)$$

Aplicând (2.113) la (2.111) rezultă că:

$$X_{MIAN}(\omega) = A_p \frac{\tau_p}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_p \frac{\tau_p}{2}} \text{sinc} \left( \frac{n\Omega_p \tau_p}{2} \right) [X_0(\omega) \otimes \delta(\omega - n\Omega_p)]$$

sau

$$X_{MIAN}(\omega) = A_p \frac{\tau_p}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_p \frac{\tau_p}{2}} \text{sinc} \left( \frac{n\Omega_p \tau_p}{2} \right) X_0(\omega - n\Omega_p) \quad (2.114)$$

Modulul densității spectrale de amplitudine în cazul semnalului MIAN devine:

$$|X_{MIAN}(\omega)| = A_p \frac{\tau_p}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left( \frac{n\Omega_p \tau_p}{2} \right) |X_0(\omega - n\Omega_p)| \quad (2.115)$$

Reprezentările grafice ale spectrului  $X_0(\omega)$  al semnalului modulator, precum și modulul densității spectrale de amplitudine pentru semnalul MIAN sunt prezentate în figura 2.43.

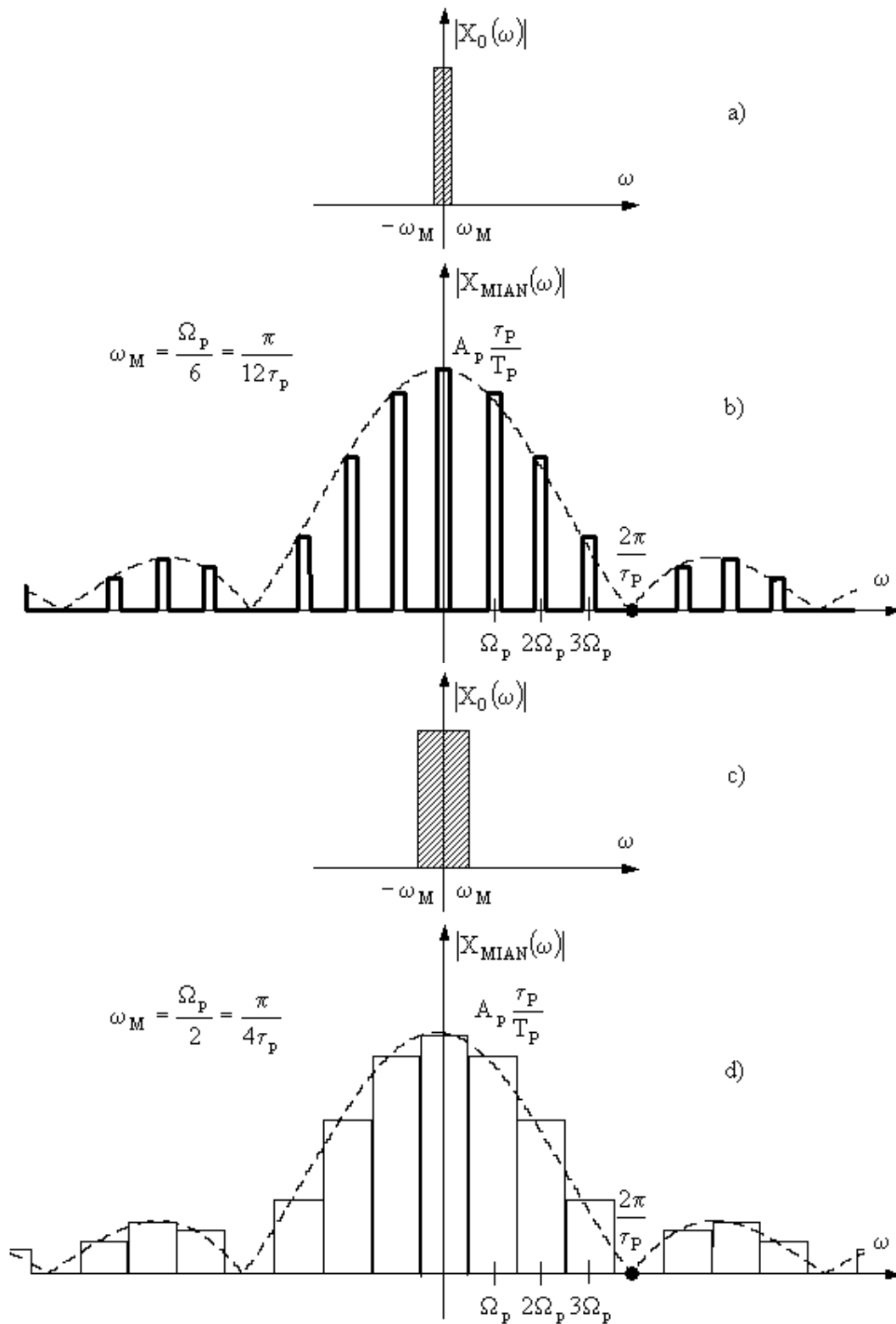


Fig. 2.43 Reprezentările  $X_0(\omega)$  și  $|X_{MIAN}(\omega)|$  în două cazuri: a), b) condiția lui Nyquist este respectată  $\Omega_p = 6\omega_M$ ; a), b) condiția lui Nyquist este la limită  $\Omega_p = 2\omega_M$

Observații:

➤ Relația (2.116) arată că  $|X_{\text{MIAN}}(\omega)|$  sau  $X_{\text{MIAN}}(\omega)$  este o repetare a spectrului semnalului modulator, la  $n\Omega_p$ , ca și în cazul eșantionării ideale (vezi figura 2.36).

➤ Deosebirea acestui timp de modulație în impulsuri față de eșantionarea ideală, constă în faptul că în cazul modulației spectrele astfel repetate nu mai au aceeași amplitudine. În cazul MIAN fiecare spectru este ponderat cu un alt coeficient,  $\sin c\left(\frac{n\Omega_p \tau_p}{2}\right)$ .

➤ Înfașurătoarea spectrului semnalului MIAN este dată de  $\sin c\left(\frac{n\Omega_p \tau_p}{2}\right)$ .

➤ Pentru ca semnalul să poată să fie reconstituit la recepție este necesară îndeplinirea condiției lui Nyquist  $\Omega_p > 2\omega_M$ . În figura 2.43b) este reprezentat modulul densității spectrale de amplitudine a semnalului MIAN în cazul în care  $\omega_M = \frac{\Omega_p}{6} = \frac{\pi}{12\tau_p}$ . În figura 2.43d) este reprezentat modulul densității spectrale de amplitudine a semnalului MIAN în cazul în care condiția lui Nyquist este la limită  $\omega_M = \frac{\Omega_p}{2} = \frac{\pi}{4\tau_p}$ .

Teoretic, semnalul modulator poate fi reconstituit prin filtrare în două moduri:

➤ filtrare trece-jos FTJ, prin selectarea benzii  $[0, \omega_M]$  și blocarea celorlalte componente;

➤ filtrare trece-bandă FTB, prin selectarea benzii  $[n\Omega_p - \omega_M, n\Omega_p + \omega_M]$  și blocarea celorlalte componente, urmată de o translație a benzii în domeniul frecvențelor joase (prin demodulare);

## B. Modulația uniformă a impulsurilor în amplitudine

Dispozitivele cu care se realizează practic eșantionarea sunt circuite logice la ieșirea cărora, impulsurile nu urmăresc variația instantanee a semnalului modulator  $x_0(t)$ , ci iau valoarea semnalului  $x_0(t)$  în momentul sondării  $t = kT_p$ , pentru întreg intervalul de timp  $\tau_p$ .

Forma de undă a semnalului MIAU este prezentată în figura 2.40.d).

Semnalul  $x_{\text{MIAU}}(t)$  se obține prin prelucrările ilustrate de sistemul din figura 2.44.

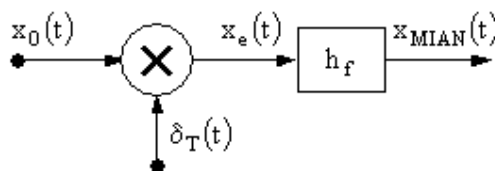


Fig.2.44 Principiul generării semnalelor MIAU

Semnalul modulator este eșantionat având expresia  $x_{0e}(t) = x(t)\delta_T(t)$ . Semnalul modulat este obținut cu ajutorul aceluiași circuit de formare  $h_f$ , care răspunde la fiecare impuls,  $x(kT)\delta(t - kT)$ , cu un impuls de amplitudine  $x(kT)$  și durată  $\tau_p$ , plasat pe axa timpului la  $t = kT_p$ .



Astfel se obține:

$$x_{\text{MIAU}}(t) = x_{0e}(t) \otimes h_f(t) \quad (2.116)$$

### Analiza spectrală a semnalului MIAU

Conform teoremei integralei de convoluție în timp, expresia  $X_{\text{MIAU}}(\omega)$  se calculează astfel:

$$X_{\text{MIAU}}(\omega) \stackrel{(1.120)}{=} X_{0e}(\omega) \cdot H_f(\omega) \quad (2.117)$$

unde

$$H_f(\omega) = A_p \tau_p e^{-j\omega \frac{\tau_p}{2}} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_p}{2} \right) \quad (2.118)$$

Aplicând (2.101),

$$X_{0e}(\omega) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega_p) \text{ și (2.118) la (2.117),}$$

rezultă că:

$$X_{\text{MIAU}}(\omega) = A_p \frac{\tau_p}{T_p} e^{-j\omega \frac{\tau_p}{2}} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_p}{2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega_p) \quad (2.119)$$

Modulul densității spectrale de amplitudine în cazul semnalului MIAU devine:

$$|X_{\text{MIAU}}(\omega)| = A_p \frac{\tau_p}{T_p} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_p}{2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(\omega - n\Omega_p)| \quad (2.120)$$

Reprezentarea grafică a modului densității spectrale de amplitudine pentru semnalul MIAU este prezentată în figura 2.45.

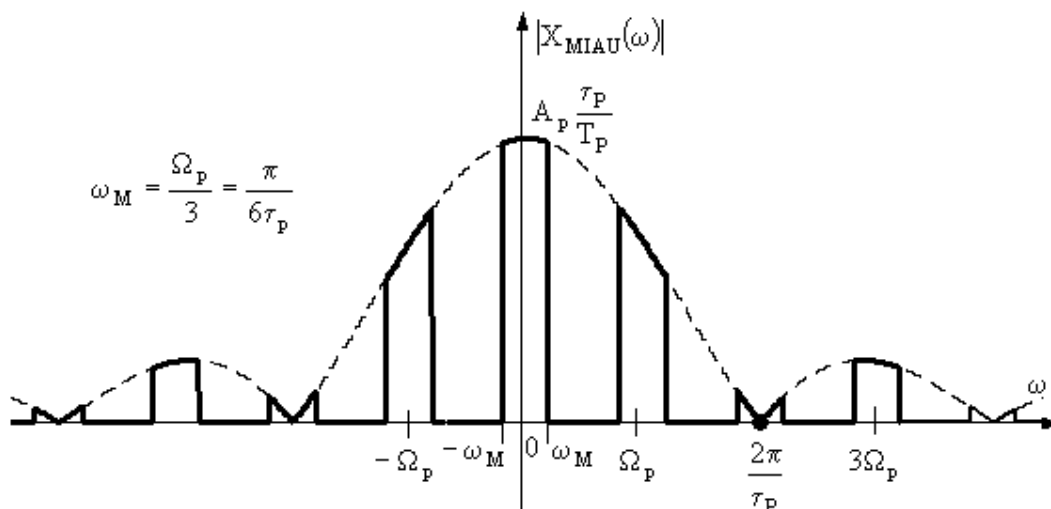


Fig. 2.45 Reprezentarea  $|X_{\text{MIAU}}(\omega)|$

Observații:

➤ Relația (2.120) arată că  $|X_{\text{MIAU}}(\omega)|$  este o repetare a spectrului semnalului modulator, la  $n\Omega_p$ .

➤ Deosebirea dintre MIAU și MIAN constă în faptul că în cazul modulației uniforme apar deformări ale spectrului semnalului modulator datorate înfășurătoarei. Aceste deformări poartă denumirea de efect de apertură.

- Efectul de apertură se reduce odată cu mărirea raportului  $\frac{T_p}{\tau_p}$ .
- Efectul de apertură din banda de bază ( $|\omega| < \omega_M$ ) este neglijabil la  $\tau_p$  mic

Concluzie:

MIA este utilizată ca metodă de bază pentru folosirea intensivă a unui canal detelecomunicații prin multiplexare în timp, în opoziție cu multiplexarea în frecvență. În figura 2.46 este ilustrat principiul multiplexării în timp.

Canalul de telecomunicații “se împarte” în timp la emisie între (în cazul acestui exemplu) trei căi A, B, C prin intermediul comutatorului electronic  $K_e$ . Acesta rămâne un interval de timp  $\tau_p$  pe fiecare cale, reluându-și ciclul de rotație la fiecare interval  $T_p$  ( $T_p \gg \tau_p$ ).

În acest mod are loc MIA având ca semnal modulator pe  $x_A, x_B, x_C$  și ca purtător un semnal  $x_p(t)$  format din impulsuri dreptunghiulare de durată  $\tau_p$ , care se repetă (pentru fiecare cale) la intervalul  $T_p$ .

Pe canalul de telecomunicație eșantioanele căilor apar întrepesute  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 \dots$

Reconstituirea semnalelor la recepție se face prin rotirea comutatorului  $K_r$  identic și sincron cu  $K_e$ . Se obțin semnalele eșantionate corespunzătoare din care  $x_A, x_B, x_C$  se recuperează prin filtrare.

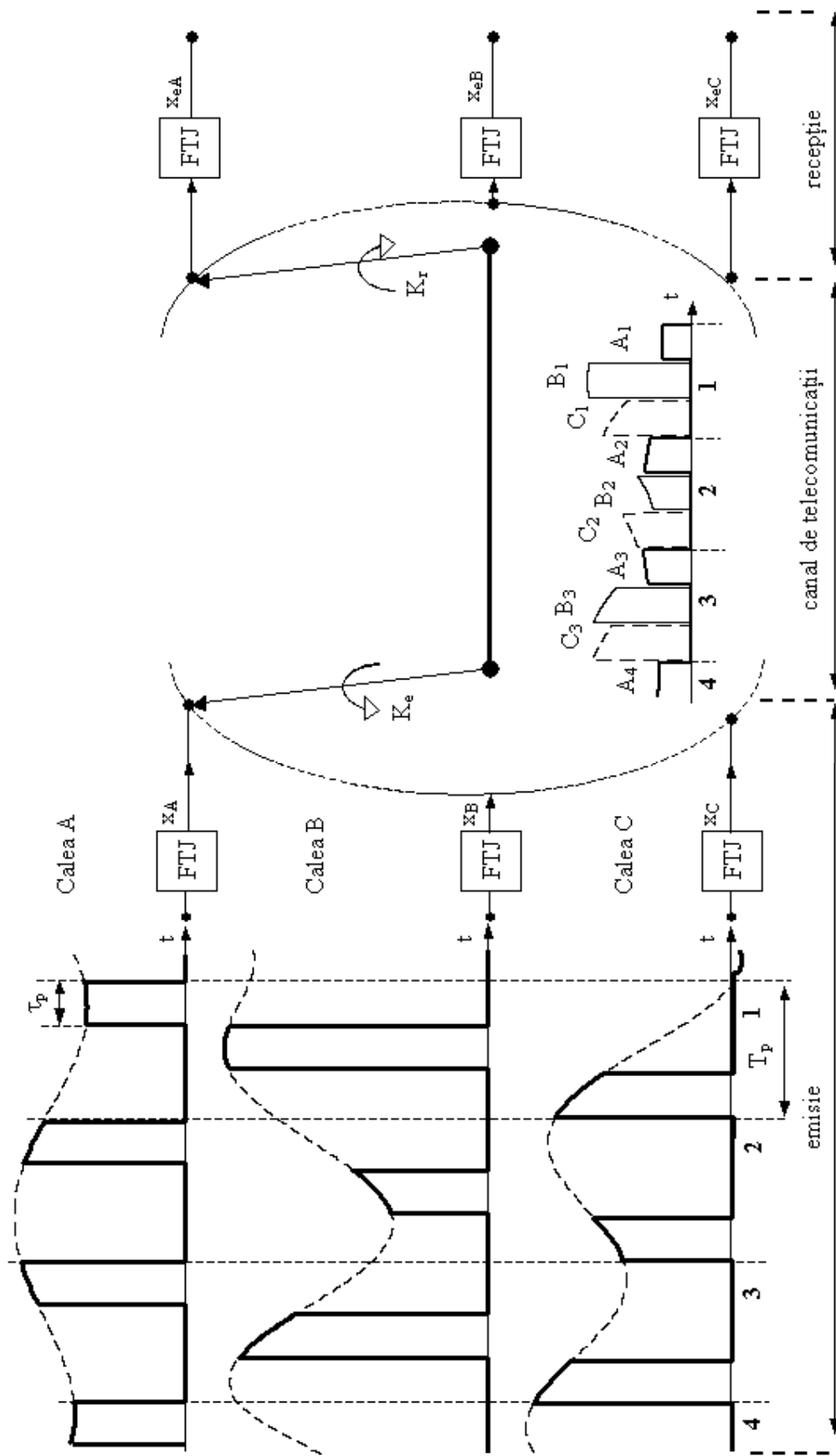


Fig. 2.46 Principiul sistemelor de telecomunicații cu multiplexare în timp

### 2.4.2. Modulația impulsurilor în poziție M.I.P.

În cazul MIP semnalul modulator  $x_0(t)$  comandă modificarea cu  $\Delta p(t)$  a poziției impulsurilor semnalului purtător  $x_p(t)$ , prezentat în figura 2.39. În continuare se va considera că semnalul modulator este sinusoidal.

Expresia generală a unui semnal MIP este:

$$x_{MIP}(t) = x_p[t + \Delta p(t)] \quad (2.121)$$

unde  $\Delta p(t)$  se numește deviația poziției impulsurilor.

După cum s-a precizat la începutul acestui paragraf, se va specifica dacă modulația poziției se face prin intermediul fazei inițiale sau a frecvenței instantanee.

- Modulația poziției are loc prin modulație de fază, M.I.P  $\equiv$  M.I. $\Phi$ ., dacă:

$$\Delta p(t) = k_p x(t) \quad (2.122)$$

unde  $-k_p$  - este constanta modulatorului de fază.

În acest caz MIP se face prin deplasarea poziției inițiale. Pentru cazul în care semnalului modulator este sinusoidal,  $x_0(t) = a_0 \sin(\omega_0 t)$ , expresia (2.121) devine:

$$\Delta p(nT_p) = k_p a_0 \sin(\omega_0 nT_p) \stackrel{k_p=1}{=} a_0 \sin(\omega_0 nT_p) = \Delta p_M \sin(\omega_0 nT_p) \quad (2.123)$$

unde  $\Delta p_M = a_0$  este deviația maximă a poziției impulsurilor.

Se observă că  $\Delta p_M$  nu depinde de frecvența semnalului modulator.

- Modulația poziției are loc prin modulație de frecvență, M.I.P  $\equiv$  M.I.F., dacă:

$$\Delta p(t) = k_p \int_0^t x(\tau) dt \quad (2.124)$$

În acest caz MIP se face prin deplasarea frecvenței instantanee. Pentru cazul în care semnalului modulator este sinusoidal,  $x_0(t) = a_0 \sin(\omega_0 t)$ , deviația poziției impulsurilor devine:

$$\Delta p(t) = k_p \int_0^t a_0 \sin(\omega_0 t) dt = \frac{k_p a_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

Notând  $\Delta \Omega = k_p a_0$  deviația de frecvență, rezultă că:

$$\Delta p(t) = \frac{\Delta \Omega}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \quad (2.125)$$

iar expresia (2.124) devine:

$$\Delta p(nT_p) = \frac{\Delta \Omega}{\omega_0} \cos(\omega_0 nT_p) = \Delta p_M \cos(\omega_0 nT_p) \quad (2.126)$$

unde  $\Delta p_M = \frac{\Delta \Omega}{\omega_0}$  este deviația maximă a poziției impulsurilor.

Se observă că  $\Delta p_M$  depinde de frecvența semnalului modulator (a mesajului).

Observație:

- Cu excepția defazajului suplimentar de  $\frac{\pi}{2}$  alocat mesajului, efectul asupra deviației poziției impulsurilor dat de (2.123) M.I.P  $\equiv$  M.I. $\Phi$ ., este același cu cel dat de (2.126) M.I.P  $\equiv$  M.I.F.

Modulația în poziție a unui purtător în impulsuri  $x_p(t)$  cu un semnal modulator sinusoidal  $x_0(t)$  este reprezentată în figura 2.47.

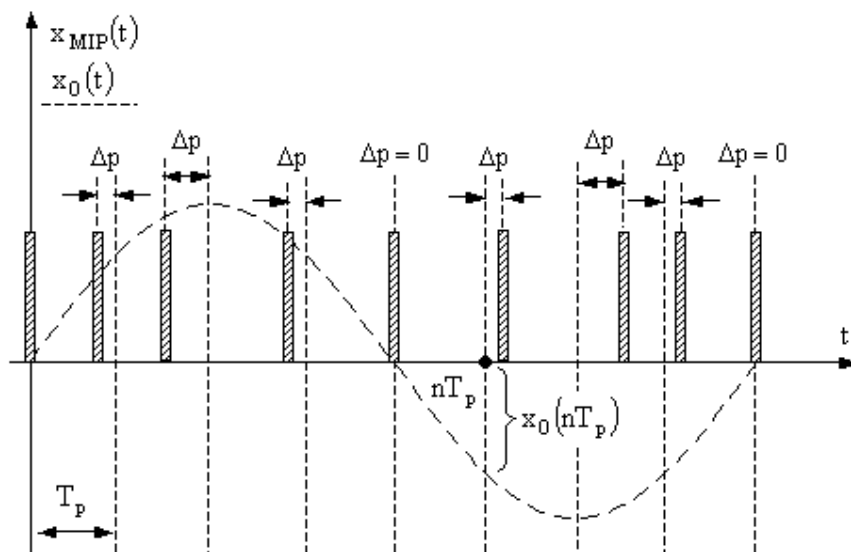


Fig. 2.47 Modulația impulsurilor în poziție MIP

Pentru ca impulsurile rezultate în urma modulației să nu alunece unele peste altele este obligatoriu a se îndeplini următoarea condiție:

$$\Delta p_M < \frac{T_p}{2} \tag{2.127}$$

Ca și în cazul modulației impulsurilor în amplitudine, modulația în poziție se poate obține prin modulație naturală, MIPN, sau uniformă, MIPU.

Analiza spectrală a semnalelor MIP fiind relativ complicată, se prezintă doar expresiile finale ale densităților spectrale ale semnalelor MIP.

$$X_{MIPN}(\omega) = 2\pi A_p \tau_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_p \frac{\tau_p}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\Omega_p \tau_p}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(n\Omega_p \Delta p_M) \delta(\omega - n\Omega_p - k\omega_0) \tag{2.128}$$

$$X_{MIPU}(\omega) = A_p \tau_p e^{-j\omega \frac{\tau_p}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_p}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\omega \Delta p_M) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(k\omega_0 - \omega)nT_p} \tag{2.129}$$

Observație:

- Funcțiile de densitate spectrală conțin o infinitate dublă de componente cu amplitudini proporționale cu funcțiilor Bessel.
- Componentele importante ale spectrului sunt situate în interiorul benzii  $\omega \leq \frac{2\pi}{\tau_p}$ .

Celelalte componente au valori neglijabile.

- Spectrul semnalelor MIP este mai mare decât spectrul semnalelor MIA.
- Pentru ca prin deplasarea impulsurilor din poziția originală să nu apară suprapuneri între impulsuri adiacente (respectarea condiției 1.127) este necesară o îngustare a impulsurilor. Această comprimare în timp este echivalentă cu extinderea în frecvență, deci banda de frecvență ocupată de semnal va fi mai mare.
- Avantajul semnalelor MIP constă în simplitatea sistemelor modulare-demodulare, precum și în protecția sporită față de zgomote.

### 2.4.3. Modulația impulsurilor în durată M.I.D.

În cazul MID semnalul modulator  $x_0(t)$  comandă modificarea cu  $\Delta\tau(t)$  a duratei impulsurilor semnalului purtător  $x_p(t)$ , prezentat în figura 2.39. În continuare se va considera că semnalul modulator este sinusoidal.

Durata impulsurilor semnalului modulat este modificată după legea

$$\tau(t) = \tau_p + \Delta\tau(t) \quad (2.130)$$

unde

$$\Delta\tau(t) = k_d x_0(t) \quad (2.131)$$

Modulația în durată a unui purtător în impulsuri  $x_p(t)$  cu un semnal modulator sinusoidal  $x_0(t)$  este reprezentată în figura 2.48.

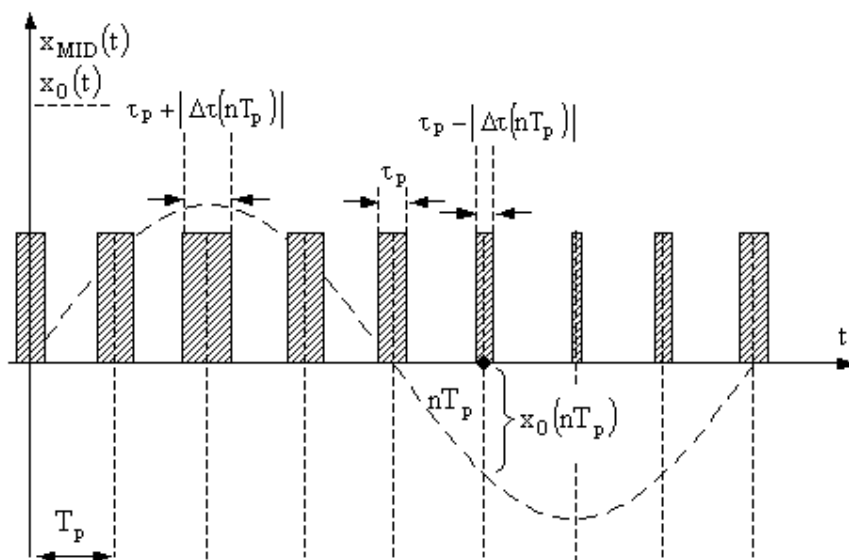


Fig. 2.48 Modulația impulsurilor în durată MID

Introducând notația

$$\Delta\tau_M = \max\{k_d |x_0(t)|\} \quad (2.132)$$

rezultă că pentru a putea recupera semnalul de bază (modulator) este necesar ca:

$$\Delta\tau_M \leq \tau_p \leq \frac{T_p}{2} \quad (2.133)$$

Funcțiile de densitate spectrală corespunzătoare semnalului  $x_{MID}(t)$  conduc la expresii analitice a căror prelucrare depășește cadrul alocat acestui curs.

Observație:

- Spectrul semnalelor MID este mai mare decât spectrul semnalelor MIA.
- Semnalele cu MID sunt utilizate mai ales în aparatura de măsurare și control și în mai mică măsură în sistemele de transmitere a informației.

## BIBLIOGRAFIE

- [CAR80] Cartianu, Gh., Săvescu, M., Constantin, I., Stanomir, D.: *Semnale, circuite și sisteme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
- [DAS82] Dascălu, D., Rusu, A., Profirescu, M., Costea, I.: *Dispozitive și circuite electronice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [DĂN82] Dănilă, T., Reus, N.: *Dispozitive și circuite electronice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [FEȘ90] Feștilă, L., Simion, E., Miron, C.: *Amplificatoare audio și sisteme musicale*, Editura Dacia, Cluj- Napoca, 1990.
- [GRA73] Gray, P.E., Campbell, S. L.: *Bazele electronicii moderne, vol. I*: Editura Tehnică București, 1973.
- [HOF84] Hoffman, I.: *Dispozitive și circuite electronice*, Institutul Politehnic “Traian Vuia”, Timișoara, 1984.
- [MAI80] Maican, S.: *Sisteme numerice cu circuite integrate. Probleme*: Editura Tehnică, București, 1980.
- [MAT97] Mateescu, A., Ciochină, S., Dumitru, N., Șerbănescu, Al., Stanciu, L.: *Prelucrarea numerică a semnalelor*, Editura Tehnică, București, 1997.
- [MAT79] Mateescu, A., Dumitru, N.: *Semnale și circuite de telecomunicații*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [MAT84] Mateescu, A.: *Semnale circuite și sisteme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
- [MIR83] Miron, C.: *Introducere în circuite electronice*, Editura Dacia, Cluj- Napoca, 1983.
- [PAN97] Panta, A.: *Dispozitive și circuite electronice*, Petroșani, 1997.
- [STR99a] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G., Ștefan, A., Miron, M.: *Circuite Oscilante, Culegere de probleme*, Brașov, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, 1999.
- [STR99b] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G., Ștefan, A., Miron, M.: *Analiza spectrală a semnalelor neperiodice, culegere de probleme*, Brașov, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, 1999.
- [STR99c] Strîmbu, C., Ștefan, A.: *Semnale și Circuite Electronice, Îndrumar de Laborator*, Brașov, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, 1999.
- [STR00a] Strîmbu, C., Ștefan, A.: *Analiza semnalelor cu PSPICE*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.
- [STR00b] Strîmbu, C., Ștefan, A.: *Semnale și Circuite Electronice, Îndrumar de Laborator, vol I, II*, Brașov, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, Brașov, 2000.
- [STR00c] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G., Ștefan, A., Miron, M., Bidu, E.L.: *Electronică, Îndrumar de Laborator vol I, II*, Brașov, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, Brașov, 2000.
- [STR06] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G.: *Electronică-ghid de pregătire a examenului de licență*, Brașov, Editura Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”, Brașov, 2006.

- [ȘTE99] Ștefan, A., Strîmbu, C., Dumea, V.: *Semnale și Circuite Electronice, Curs, vol I*, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, Brașov, 1999.
- [SZT87] Sztojanov, J., Borcoci, E., Tomescu, N., Bulik, D., Petrec, M., Petrec, C.: *De la poarta TTL la microprocesor*, Editura Tehnică, București, 1987.
- [SZT97] Sztojanov, J., Pașca, S.: *Analiza asistată de calculator a circuitelor electronice*, Editura Teora, București, 1997.
- [TOA86] Toacșe, Gh.: *Introducere în microprocesoare*: Editura Științifică și Enciclopedică, București 1986
- [TOA96] Toacșe, Gh., Nicula, D.: *Electronică digitală*, Editura Teora, București, 1996.
- [TOM84] Toma, C.I., Gui, V., Oteșteanu, M.: *Dispozitive și circuite electronice*, Institutul Politehnic “Traian Vuia”, Timișoara, 1984.
- [URS99] Ursuleanu, R., Suctiar, I.: *Elemente de electrotehnică și electronică*, Editura Satya, Iași, 1999.
- [VAS81] Vasilescu, G., Lungu, Ș.: *Electronică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.