PROPRIETĂȚI ALE SERIEI ARMONICE

Gheorghe AMURĂRIȚEI

Academia Forțelor Aeriene "Henri Coandă"

Abstract: *This paper displays some summing up characteristics of the subrows of the harmonic series.*

Cuvinte cheie: *sumabilitate, sume parțiale ordonate, sume parțiale neordonate, convergență.*

Spunem că o mulțime este sumabilă dacă putem determina o metodă prin care să atribuim un număr real sumei tuturor elementelor sale. Dacă mulțimea este numărabilă, deci formează un șir $\{a_n\}$, atunci suma elementelor formează o serie notată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sau mai simplu $\sum a_n$ dacă nu ne interesează suma. Sumabilitatea în acest caz se traduce prin convergența șirului de sume parțiale ordonate $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Se poate consulta [1], cap.III, §5, pentru detalii privind sumabilitatea în general și cazul seriilor de numere reale.

Acest articol studiază sumabilitatea câtorva subșiruri pentru șirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, suma termenilor săi fiind cunoscută sub numele de seria armonică. Se știe [1], pag.131, că seria lui Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge dacă $a > 1$ și este divergentă în rest. Atunci șirul dat nu este sumabil, șirul sumelor parțiale ordonate fiind monoton crescător și nemărginit superior, deci cu limita ∞. Dar există subșiruri de forma $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$, $k \in N - \{0,1\}$ care sunt sumabile, la unele putem afla și suma. Un alt subșir sumabil remarcabil este $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$, suma sa fiind numărul lui Euler e. Este evident că există și subșiruri care nu sunt sumabile.

De exemplu, subșirurile: $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$. Propozițiile care urmează se vor ocupa de sumabilitatea altor submulțimi din șirul considerat.

<u>Propozitia 1.</u> *Seria* $\sum \frac{1}{p_i}$ *este divergentă,* p_i *fiind numerele prime ordonate crescător.*

<u>Demonstratie.</u> Fie $\varphi(n)$ numărul numerelor prime mai mici sau egale cu n și sumele parțiale din seria considerată de forma $s(n) = \sum\limits_{p_i \le n} \frac{1}{p_i}$.

Este evident că $s(n) - s(n-1)$ are valoarea p_n^{-1} dacă $n = p_n$ este număr prim și 0 în caz contrar. Atunci $n[s(n) - s(n-1)] = 1$ de unde rezultă că pentru numărarea numerele prime mai mici sau egale cu n putem folosi expresia:

$$\varphi(n) = 1[s(1) - s(0)] + 2[s(2) - s(1)] + \cdots + \\ + n[s(n) - s(n-1)] = ns(n) - [s(1) + \cdots + s(n-1)] \quad (01)$$

<u>Dacă seria din enunt ar fi convergentă</u> și ar avea suma s, atunci șirul $\{s(n)\}$ ar fi convergent cu limita s. Consecința Cauchy de la lema lui Stolz [1], pag. 123, spune că șirul mediilor sale aritmetice este convergent și are aceeași limită. Rezultă astfel că:

$$\lim \frac{\varphi(n)}{n} = \lim s(n) - \lim \frac{s(1) + \cdots + s(n)}{n} = 0 \quad (02)$$

Convergența seriei și limita precedentă asigură existența unui n suficient de mare astfel încât:

$$s - s(n) = \sum_{p_i \geq n} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}; \quad \frac{\varphi(n!m)}{n!m} < \frac{1}{2n!} \quad (03)$$

pentru m suficient de mare. Cu aceste valori să considerăm numerele $t_k = n!k - 1$, $1 \leq k \leq m$. Dacă numărul prim p divide pe t_k evident că $p > n$, iar dacă $t_k - t_i \vdots p$ atunci $k - i \vdots p$. Dar diferențele $k - i \in \overline{0, m-1}$ și dintre ele numai $\left[\frac{m}{p}\right] + 1$ sunt divizibile cu p. Rezultă că acesta este numărul maxim de numere t_k divizibile cu p. Deoarece fiecare t_k este divizibil cel puțin cu un număr prim situat între n și $n!m$ rezultă că numărul numerelor t_k divizibile cu numerele prime $n < p_i < n!m$ este mai mare decât m. Deci

$$m \leq \sum_{n<p_i<n!m} \left(1 + \left[\frac{m}{p_i}\right]\right) \leq \sum_{n<p_i<n!m} \left(1 + \frac{m}{p_i}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{p_i \leq n!m} 1 + m \sum_{p_i > n} \frac{1}{p_i} = \varphi(n!m) + ms - ms(n) \quad (04)$$

Folosind relațiile (03) rezultă că:

$$1 > \frac{\varphi(n!m)}{m} + s - s(n) \geq 1 \quad (05)$$

ceea ce este absurd. Urmează că presupunerea făcută este falsă, deci seria este divergentă.

Observatia 1. Presupunerea falsă că seria precedentă nu este convergentă nu conduce la concluzia că $\lim \frac{\varphi(n)}{n}$ nu ar fi 0. Aceasta este 0 conform teoremei lui Cebâșev, [3], pag. 61, care a arătat că:

$$\frac{0{,}40}{\lg n} < \frac{\varphi(n)}{n} < \frac{0{,}48}{\lg n} \quad (06)$$

Propozitia 2. *Dacă din șirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ se elimină termenii pentru care, în scrierea zecimală, n nu conține cifra 9 seria obținută este convergentă.*

Demonstrație. Se știe că oricare ar fi $n \in N$ există m natural asfel încât:

$$m < 10m \leq n < 10(m+1) \quad (07)$$

Să notăm cu $\{A_n\}$ șirul sumelor parțiale ordonate pentru seria cu termenii rămași din șirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ după eliminarea celor menționați în enunț. Atunci

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{10(m-1)} + \frac{1}{10m-9} + \cdots + \frac{1}{10m-1}\right) +$$

$$\frac{1}{10m} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{2263}{840} + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10(m-1)} +$$

$$+ \frac{9}{10m} = \frac{2283}{840} + \frac{9}{10} A_m \quad (08)$$

deoarece și din mulțimea numerelor naturale $\{1, 2, \cdots, m\}$ sunt eliminate cele care conțin cifra 9 în scrierea zecimală. Atunci:

$$A_n = \frac{2283}{840} + \frac{9}{10} A_m < A_m \Rightarrow$$

$$A_m < \frac{2283}{84} < 27 \quad (09)$$

Deoarece seria are termenii pozitivi și sumele parțiale formează un șir mărginit, rezultă că seria este convergentă. Suma este mai mică decât 27.

Propozitia 3. *Oricare ar fi numărul rațional $r \geq 1$ există o sumă parțială neordonată a seriei armonice a cărei valoare este r.*

Demonstratie. O sumă parțială neordonată a seriei este de forma $S_I = \sum_{n \in I} \frac{1}{n}$, unde I este o mulțime finită de numere naturale. Să notăm cu S_n suma parțială ordonată de rang n. Va exista un rang n_0 astfel încât:

$$S_{n_0} \leq r < S_{n_0+1} = S_{n_0} + \frac{1}{n_0 + 1} \quad (10)$$

Dacă $r = S_{n_0}$ atunci aceasta este suma parțială căutată. Dacă nu, atunci notăm:

$$0 < r_1 = r - S_{n_0} < \frac{1}{n_0 + 1} < 1 \quad (11)$$

deci există $n_1 \in N$ astfel încât $\frac{1}{n_1 + 1} \leq r_1 < \frac{1}{n_1}$ și evident $n_1 > n_0$. Dacă $r_1 = \frac{1}{n_1 + 1}$ atunci $r = S_I$, unde $I = \{1, 2, \cdots, n_0, n_1 + 1\}$ și demonstrația este terminată. În caz contrar observăm că numărul rațional $r_2 = r_1 - \frac{1}{n_1 + 1}$ are aceeași proprietate ca și r_1, deci există $n_2 > n_1$ încât $\frac{1}{n_2+1} \le r_2 < \frac{1}{n_2}$ și procedeul poate continua.

Observăm că au loc relațiile:

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{n_1} \Leftrightarrow n_1 p_1 < q_1,$$

$$r_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 - (q_1 - n_1 p_1)}{q_2} \quad (12)$$

deci $p_2 < p_1$. Acest fapt arată că procedeul este finit, deoarece există un număr finit, k, de numere naturale mai mici decât p_1. Atunci $r = S_{n_0} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i+1}$ și demonstrația este finalizată.

Observația 2. De fapt proprietatea are loc și pentru numerele raționale mai mici decât 1, doar că în acest caz suma parțială ordonată S_{n_0} nu va începe cu 1 ci cu un anumit termen al seriei.

Considerăm acum cazul când adunăm doar unii termeni ai șirului $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, iar pe alții îi scădem. Dacă facem acest lucru alternativ obținem seria armonică alternantă, despre care știm că este convergentă conform criteriului lui Leibnitz [1], pag. 142. Să analizăm cazul seriei formate prin adunarea primilor p termeni din șir, apoi scăderea următorilor q termeni, adunarea următorilor p termeni și așa mai departe. Dacă notăm:

$$a_n = \begin{cases} 0 & k(p+q)+1 \le n \le k(p+q)+p \\ 1 & k(p+q)+p < n \le (k+1)(p+q) \end{cases} \quad (13)$$

atunci analizăm sumabilitatea șirului $\left\{\frac{(-1)^{a_n}}{n}\right\}$.

Propoziția 4. *Condiția necesară și suficientă pentru convergența seriei* $\sum (-1)^{a_n} \frac{1}{n}$ *este* $p = q$.

Demonstrație. Din șirul sumelor parțiale ordonate analizăm subșirul $\{S_{n(p+q)}\}$, unde

$$S_{n(p+q)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k(p+q)+1} + \dots + \frac{1}{k(p+q)+p} - \frac{1}{k(p+q)+p+1} - \dots - \frac{1}{k(p+q)+p+q} \right) \quad (14)$$

Observăm că am obținut termenul general din șirul sumelor parțiale pentru seria $\sum a_k$.

Dacă $p \ne q$ atunci $\lim k a_k = \frac{p-q}{p+q} \ne 0$, deci seria este divergentă conform criteriului în α [2], pag. 45, adică $\lim_n S_{n(p+q)} = \infty$.

Dacă $p = q$ atunci:

$$a_k = \frac{1}{2kp+1} - \frac{1}{(2k+1)p+1} + \frac{1}{2kp+2} - \frac{1}{(2k+1)p+2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)p} - \frac{1}{(2k+2)p} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{p}{(2kp+i)(2kp+p+i)} \quad (15)$$

deci $\lim k^2 a_k = \sum_{i=1}^{p} \frac{p}{4p^2} = \frac{1}{4}$. Rezultă că seria $\sum a_k$ este convergentă, conform aceluiași criteriu în α, deci șirul $\{S_{n(p+q)}\}$ este convergent.

Termenii subșirurilor complementare acestuia din șirul sumelor parțiale $\{S_n\}$ pentru seria din enunț diferă de ai subșirului $\{S_{n(p+q)}\}$ printr-un număr finit de termeni care au limita 0. Rezultă că toate subșirurile au aceeași proprietate cu cel pe care l-am studiat, deci șirul sumelor parțiale pentru seria din enunț este convergent dacă $p = q$ și divergent dacă $p \ne q$. Deci seria converge în primul caz și este divergentă în al doilea.

Metoda de demonstrație permite generalizarea criteriului lui Leibnitz.

Propoziția 5. *Fie* $\{a_n\}$ *un șir descrescător de numere reale pozitive cu limita* 0. *Atunci seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_n, \quad p \in N - \{0\} \quad (16)$$

este convergentă.

Demonstrație. Considerăm subșirul $\{S_{2kp}\}$ din șirul sumelor parțiale pentru seria (3). Deci

$$S_{2kp} = (a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}) - (a_p + a_{p+1} + \dots + a_{2p-1}) + \dots + (a_{(2k-2)p} + \dots +$$

$$+a_{(2k-1)p-1})-(a_{(2k-1)p}+\cdots+a_{2kp-1}) \quad (17)$$

Deoarece șirul $\{a_n\}$ este descrescător se observă că $\{S_{2kp}\}$ este șir descrescător mărginit inferior de 0, deci convergent. Celelalte subșiruri din șirul sumelor parțiale au termenii de forma:

$$S_{2kp+i}=\begin{cases} S_{2kp}+a_{2kp+1}+\cdots+a_{2kp+i} & i<p \\ S_{(2k+1)p}-a_{(2k+1)p}-\cdots-a_{2kp+i} & i\geq p \end{cases} \quad (18)$$

deci au aceeași limită cu șirul considerat pentru că șirul $\{a_n\}$ are limita 0. Astfel șirul sumelor parțiale ordonate ale seriei (3) este convergent, deci seria este convergentă și astfel propoziția este complet demonstrată.

Dacă procedeul folosit la formarea seriei din propoziția 4 folosește doi termeni pozitivi și unul negativ, dar neordonat, este posibil ca seria rezultată să fie convergentă.

Propoziția 6. *Dacă suma seriei armonice alternante este* $2s$ *atunci seria:*

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{9}-\cdots \quad (19)$$

este convergentă și are suma *s*.

Demonstrație. Procedăm ca la propoziția 5 considerând un subșir al șirului sumelor parțiale pentru seria dată. Fie:

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(2k-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_{2n} \quad (20)$$

unde s_{2n} este suma parțială de rang 2n a seriei armonice alternante, deci $\lim s_{2n}=2s$. Astfel rezultă că șirul sumelor parțiale pentru seria din enunțul propoziției este convergent, deoarece

$$\lim S_{3n}=\lim S_{3n+1}=\lim S_{3n+2}=s \quad (21)$$

Rezultă că seria este convergentă și are suma s.

Acest exemplu este o confirmare a teoremei lui Riemann care afirmă că în cazul unei serii convergente, dar nu absolut convergente, putem schimba ordinea termenilor astfel încât seria nou obținută să fie divergentă sau convergentă având suma un număr dinainte stabilit. Demonstrația poate fi găsită în [1], pag. 150.

BIBLIOGRAFIE

1. Amurăriței, Gh., *Analiză matematică*, vol. I, Universitatea "Transilvania" din Brașov, 1983;
2. Amurăriței, Gh., *Analiză matematică*, vol. I, Academia Forțelor Aeriene "Henri Coandă", Brașov, 2000;
3. Iaglom, A.M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Editura Tehnică, București, 1983;
4. Sirețchi, Gh., *Analiză matematică*, vol. II, *Exerciții avansate de calcul diferențial și integral*, Universitatea București, 1977.